Lothar Collatz

Vortrag und Ansprachen

Augsburger
Universitätsreden 8

Augsburger Universitätsreden 8

Lothar Collatz

Vortrag und Ansprachen
anläßlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde
durch die Naturwissenschaftliche Fakultät

Augsburg 1986

Lothar Collatz
Prof. Dr. Dr. h. c. mult.
emeritierter Ordinarius an der Universität Hamburg

Augsburger
Universitätsreden

Lothar Collatz

Geometrische Ornamente

Vortrag
anläßlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde
durch die Naturwissenschaftliche Fakultät
der Universität Augsburg
am 12. November 1985

INHALTSVERZEICHNIS

A an

Herausgegeben von der Universität Augsburg

Eröffnungsworte

Prof. Dr. Martin Grötschel, Dekan der Naturwissenschaftlichen Fakultät

Lieber Herr Collatz,
sehr verehrte Frau Collatz,
Herr Präsident,
meine Damen und Herren,

im Namen der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Augsburg möchte ich Sie zu unserem Festakt herzlich willkommen heißen. Bitte sehen Sie mir nach, daß ich Sie nicht einzeln begrüße, ich möchte jedoch nicht unerwähnt lassen, daß sehr viele Mathematiker aus nah und fern unter uns weilen, um zusammen mit uns zu feiern. Ich habe bereits Fachkollegen aus Berlin, Hamburg, Clausthal-Zellerfeld, Dortmund, Trier, Frankfurt, Mannheim, Karlsruhe, Stuttgart, Konstanz, Bayreuth, Erlangen, Eichstätt und München gesehen (und vermutlich einige übersehen). Ich danke Ihnen, daß Sie unserer Feier durch Ihre Anwesenheit zusätzlichen Glanz verleihen.

Herr Hoffmann wird später das Lebenswerk von Herrn Collatz eingehend würdigen; lassen Sie mich einige persönliche Worte voranstellen.

Ich bin Herrn Collatz persönlich meistens auf Oberwolfach-Tagungen begegnet. Ich habe dabei seine Kompetenz auf so vielen unterschiedlichen Gebieten der Mathematik und seine lebhaften, durch tiefe Einsichten geprägten Diskussionsbeiträge bewundert. Besonders beeindruckt hat mich seine außerordentliche geistige und physische Dynamik. Letztere zeigte sich speziell bei den traditionellen Wanderungen an Mittwochnachmittagen. Ich erinnere mich insbesondere an zwei Touren (Wanderungen wäre hier der falsche Ausdruck). Die eine Tour ging zur Burgruine Reichenbach, Tagungsthema war die Optimierung. Zur Verdeutlichung dieses Themas hatte Herr Collatz die Wanderdevise ausgegeben: "Wir folgen immer der Richtung des steilsten Anstiegs, Wege sind zu vermeiden." Seit dieser Tour weiß ich aus leidvoller Erfahrung, daß man besser nicht dem steilsten Anstieg folgen sollte, um den Zielpunkt zu erreichen. Dieser Eindruck hat sich ja auch in der Optimierung durchgesetzt, und ich glaube, das wollte Herr Collatz mit dieser Devise verdeutlichen.

Eine zweite Tour führte vom Brandenkopf über den Glaswaldsee nach Schappach, fast 30 km in weniger als 5 Stunden. Ich weiß noch, wie wir mit einer Gruppe sogenannter "schneller junger Männer" den letzten Anstieg zum Bergrücken oberhalb des Glaswaldsees hinter uns gebracht hatten, und wir glaubten, alle anderen weit hinter uns gelassen zu haben. Doch dort saß Herr Collatz und hatte schon zwei oder drei Skizzen der Landschaft in sein Skizzenbuch gezeichnet. Ich vermute, er hat sein Malbuch auch heute wieder mit, um seine Eindrücke bildlich festzuhalten.

Gelegentlich wird behauptet, daß der Charakter von Menschen auch durch die Namensgebung geprägt werde. Der alte Plautus hat das auf die Kurzformel "nomen est omen" gebracht. Ich bin dieser Behauptung bezüglich unseres Ehrenpromovenden durch das Studium verschiedener Werke der Namenskunde nachgegangen. Es ist interessant, was dabei herausgekommen ist. Der Name "Lothar" leitet sich von den althochdeutschen Wörtern "hlut" und "heri" ab. Das Wort hlut entspricht unserem heutigen "laut", hatte jedoch die Bedeutung "berühmt", heri bedeutet Heer. Eine kühne Deutung würde also Lothar als "berühmter Heerführer" übersetzen. Der Nachname Collatz stammt aus dem Slawischen und leitet sich vom altslawischen Wort "kolo" ($\hat{=}$ rund) ab. Formen dieses Wortes werden im Wendischen für Rad oder Radmacher (= Wagner) verwendet.

Lassen Sie mich den Namensdeutungsversuch zusammenfassen:
Lothar Collatz ist der berühmte Führer des Heeres der angewandten Mathematiker, der das Rad der angewandten Mathematik in Deutschland ins Rollen gebracht hat.

Herr Präsident, darf ich Sie nun um Ihr Grußwort bitten?

Grußwort

Universitätspräsident Prof. Dr. Josef Becker

Verehrter Herr Kollege Collatz,
meine sehr verehrten Damen, meine Herren,
Kommilitoninnen und Kommilitonen,

dies ist ein besonderer Tag in der fünfzehnjährigen Geschichte unserer Universität. Unsere jüngste Fakultät verleiht erstmals die Würde eines Ehrendoktors. Ihr Fachbereichsrat hat diese akademische Auszeichnung einem Gelehrten zugedacht, der aufgrund seines reichen wissenschaftlichen Oeuvres vielfältige Ehrungen erfahren hat - die Aufnahme in mehrere Akademien im In- und Ausland, mehrere Ehrenpromotionen an ausländischen und deutschen Hochschulen.

Die Entscheidung unserer Naturwissenschaftlichen Fakultät ist Ausdruck einer besonderen Beziehung, die unsere Mathematiker mit einem wesentlichen Teil des wissenschaftlichen Lebenswerkes von Herrn Professor Collatz verbindet: Wie in einem Zentrum der Gründungskonzeption unserer Naturwissenschaftlichen Fakultät die Praxisorientierung von Forschung und Lehre steht, so in einem Mittelpunkt des wissenschaftlichen Werdegangs von Herrn Professor Collatz und seiner Publikationen die Angewandte Mathematik.

Es ist nicht in meiner fachlichen Kompetenz, den reichen Beitrag von Herrn Professor Collatz zur Entwicklung der mathematischen Forschung zu würdigen - dies wird Herr Vizepräsident Hoffmann im Anschluß an meine kurze Begrüßung tun. Ich möchte Ihnen, verehrter Herr Collatz, im Namen der Gesamtuniversität die aufrichtigsten Glückwünsche übermitteln und der Hoffnung Ausdruck geben, daß die in dieser akademischen Feier domkumentierte wissenschaftliche Nähe zwischen Ihnen und den Augsburger Mathematikern auch in Zukunft erhalten bleibe.

Wenn ich noch ein persönliches Wort anfügen darf: Ich habe aus Iher Vita mit Interesse erfahren, daß die zweite Etappe in Ihrem wissenschaftlichen Werdegang - die Habilitation - Sie an die Fridericiana in Karlsruhe geführt hat. Es wäre für mich als geborener Badener schon eine Freude gewesen, diese Ihre Beziehung zur ältesten Technischen Hochschule

Deutschlands im Badischen Musterländle festzustellen. Da ich selbst in Karlsruhe während meiner ersten Assistentenjahre mit der Vorbereitung meiner Habilitationsschrift begann, darf ich vielleicht auch eine Verbundenheit zum Ausdruck bringen, die in dem Gefühl einer Art von akademischen Landsmannschaftlichkeit begründet liegt. Gestatten Sie mir, Ihnen auch persönlich meine sehr herzlichen Glückwünsche aus dem Anlaß dieser Ehrenpromotion im Hinblick auf Ihr künftiges wissenschaftliches und akademischen Wirken auszusprechen.

Laudatio

Prof. Dr. Karl-Heinz Hoffmann

Sehr geehrte Anwesende,
sehr verehrter lieber Herr Professor Collatz,

für die junge Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Augsburg ist es eine große Ehre, Ihnen hochverehrter Herr Professor Collatz, die Würde eines Ehrendoktors der Naturwissenschaften verleihen zu dürfen. Mich selbst freut es ganz besonders, dazu ausersehen zu sein, aus diesem Anlaß die Laudatio vorzutragen. Wir ehren in Ihnen einen herausragenden Wissenschaftler unseres Faches, sowie einen außergewöhnlichen Menschen, der auf vielfältige Weise ganze Generationen von jungen Mathematikern beeinflußt hat. Ihr engeres Fachgebiet ist die Angewandte Mathematik, gleichwohl haben Sie sich immer als Mathematiker im Sinne einer "Gesamtmathematik" verstanden, wenn Sie mir diese Wortschöpfung in Analogie zu so modernen Kreationen wie Gesamtschule oder Gesamthochschule erlauben. Sie haben Ihren Standpunkt einmal in einem Vortrag vor der Gesellschaft der Naturfreunde Leopoldina in Halle umrissen: "Daß ausgiebige theoretische Forschung nötig ist, ist selbstverständlich, moderne Forschung ist ohne abstrakte Theorie nicht denkbar. Aber es darf neben der abstrakten Theorie die Konkretisierung nicht vernachlässigt werden". Sie selbst haben in zahlreichen Vorträgen und Aufsätzen immer wieder mit Oscar Perron die Frage gestellt: "In der Mathematik bringt man heute immer mehr unter einen Hut, aber wer holt es wieder unter dem Hut hervor?" Nun, neuere Entwicklungslinien der Mathematik scheinen anzudeuten, daß sich eine Rückbesinnung zu einem gesunden Verhältnis zwischen abstrakter und konkreter Forschung vollzieht. Die Gründung der Naturwissenschaftlichen Fakultät mit ihrem Institut für Mathematik an der Universität Augsburg fiel glücklicherweise in diese Renaissance. Es erfüllt uns daher mit Stolz, daß mit der Vergabe der ersten Ehrendoktorwürde dieser Fakultät Sie, Herr Collatz, zu den Paten der jungen Augsburger Mathematik gehören werden.

Gestatten Sie mir nun, etwas ausführlicher auf das wissenschaftliche Wirken und die bibliographischen Daten des Mathematikers Lothar Collatz einzugehen.

Lothar Collatz wurde am 6. Juli 1910 in Arnsberg (Westfalen) als drittes Kind des Geodäten Carl Collatz und seiner Frau Lisbeth geboren. Nach der Schulzeit in Minden und Stettin begann er mit dem Studium der Mathematik und Physik für das höhere Lehramt. Er hörte Vorlesungen bei H. Kneser und W. Süß an der Universität Greifswald, bei O. Perron und C. Carathéodory an der Universität München, bei D. Hilbert und R. Courant an der Universität Göttingen, sowie bei R. von Mises, E. Schrödinger, L. Bieberbach und E. Schmidt in Berlin.

1935 promovierte er - als 25jähriger - mit einer Arbeit über "Differenzenverfahren mit höherer Approximation" zum Dr. phil. Der Doktorvater war E. Klose und die mündliche Prüfung absolvierte er u. a. bei dem Psychologen E. Spranger. Es ist bemerkenswert, daß schon vor der Promotion der Name Collatz in der Fachwelt nicht unbekannt war. Bereits als 23jähriger Student hatte er seine erste Arbeit publiziert.

Nach der Promotion ging er zu Th. Pöschl an dieTechnische Hochschule Karlsruhe, wo er sich bereits 1937 als 27jähriger mit der Arbeit "Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung für Differenzenverfahren bei Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen" habilitierte und Privat-Dozent wurde.

Mit diesen Leistungen in jungen Jahren erzielt, lieber Herr Collatz, wären Sie heute ein sicherer Kandidat für ein Heisenberg-Stipendium oder eine Fiebiger-Professur. Jedoch die Kriegszeit verlangsamte die steil begonnene Karriere. Wie viele andere Mathematiker arbeiteten Sie in der Luftfahrtindustrie, wo umfangreiche ingenieurwissenschaftliche und strömungsmechanische Probleme zu lösen waren.

1943 wurde Herr Collatz mit 33 Jahren auf einen Lehrstuhl für Mathematik an die Technische Hochschule Hannover berufen. Eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Ingenieuren begann. Die zahlreichen Arbeiten über Eigenwertprobleme entstanden in dieser Zeit.

Im Jahre 1946 richtete die Universität Hamburg als eine der ersten deutschen Universitäten eine Forschungsstelle für Praktische Mathematik ein. Der erste Stelleninhaber war der bekannte Zahlentheoretiker H. Zassenhaus. Nach dessen Weggang gelang es im Jahre 1952, Lothar Collatz an das damals sehr renommierte Hamburger Institut zu berufen. Mit ihm erlangte das Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg Weltruf. Es entstand die Hamburger Schule Collatz'scher

Prägung. Etwa 50 Promotionen und 20 Habilitationen sind unmittelbar aus ihr hervorgegangen, die Zahl der Mathematiker, die indirekt in ihrer wissenschaftlichen Forschung beeinflußt wurden, ist unüberschaubar. Lothar Collatz hat seinem Hamburger Institut bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1978 die Treue gehalten. Ehrenvolle Berufungen, wie an die Technische Hochschule Stuttgart, hat er abgelehnt. Ich darf hinzufügen, daß angesichts der Liebe von Professor Collatz zu den Bayerischen Bergen, der Freistaat Bayern eine große Chance verpaßt hat, vielleicht hätte er einem verlockenden Angebot nicht widerstehen können. Mitglieder des Alpenvereins sind er und seine Frau ja schon seit langer Zeit.

Zahlreiche akademische Ehrungen sind ihm zuteil geworden. Mit bisher fünf Ehrendoktortiteln wurde er ausgezeichnet:

1956 von der Universität Sao Paulo,
1967 von der Technischen Hochschule Wien,
1974 von der Universität Dundee (Doctor of Law),
1977 von der Brunel-Universität London,
1981 von der Universität Hannover.

Lothar Collatz ist Mitglied bzw. Ehrenmitglied der

Deutschen Akademie der Wissenschaften Leopoldina,
der Akademie der Wissenschaften von Modena (Italien),
der Akademie der Wissenschaften von Bologna (Italien).

Trotz aller dieser Ehrungen, von denen ich hier nur einen Teil aufgezählt habe, ist Lothar Collatz stets bescheiden geblieben. Ich weiß, daß er es nicht liebt, wenn seine Person so in den Mittelpunkt gestellt wird, wie es nun einmal aus Anlaß einer Ehrenpromotion geschieht. Seine Ermahnungen an mich, in der Laudatio Zurückhaltung zu üben, möchte ich nun befolgen, indem ich mehr über die Mathematik berichte, die Lothar Collatz so viel bedeutet, und deren Entwicklung er so entscheidend beeinflußt hat. Es wird sich jedoch auch hierbei nicht ganz vermeiden lassen, immer wieder auf seine ganz persönlichen Leistungen hinzuweisen, wenn ich auch weit davon entfernt bin, auch nur annähernd alle Teilgebiete zu erwähnen, auf denen er gearbeitet hat.

Im Jahre 1967 fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Fachtagung über "Funktionalanalytische Methoden in der

Numerischen Mathematik" statt. Tagungsleiter waren Lothar Collatz und Heinz Unger. Funktionalanalytische Methoden waren damals sowohl als vereinheitlichendes Gerüst wie auch als Quelle neuer Erkenntnis für die Numerische Mathematik von Lotahr Collatz entdeckt worden. Als Standardwerk, auch heute noch und in viele Sprachen übersetzt, hatte sich die 1964 erschienene Monographie "Funktionalanalysis und Numerische Mathematik" durchgesetzt.

Zentral für viele Überlegungen etwa zur Gewinnung exakter Fehlerabschätzungen war die Approximationstheorie. Folglich war ein Großteil der Vorträge diesem Thema gewidmet. Auf die erfolgreiche Empfehlung meines Doktorvaters - ich war damals noch nicht promoviert - hatte ich das Glück, eine der heißbegehrten Einladungen zur Oberwolfachtagung zu erhalten. Es war meine erste als Teilnehmer überhaupt - Ihre siebente als Tagungsleiter, Herr Collatz. Ich war stolz auf ein Ergebnis, das ich gefunden hatte (mein erstes in der Mathematik) und nun vortragen durfte. Es war ein Eindeutigkeitssatz in der Tschebyscheff-Approximation, den ich, dem Trend der Zeit folgend, sehr allgemein formuliert hatte, also für Funktionen auf kompakten metrischen Räumen und für Kolmogoroff Mengen 1. Art, die man heute als Sonnen bezeichnet. Herr Collatz hörte sich den Vortrag geduldig an. In der anschließenden Diskussion fragte er: "Ihr Ergebnis ist ja nun sehr allgemein. Gilt es denn auch für Funktionen zweier Variabler?" Dafür konnte es im allgemeinen nicht gelten. Das wußte jeder, auch Sie, Herr Collatz. Es gab ja das negative Resultat von Mairhuber. Ich muß allerdings gestehen, daß mich Kollegen in abendlichen Gesprächen in Oberwolfach vor meinem Vortrag schon auf diese Frage vorbereitet hatten. Diese kleine Episode verdeutlicht, wie Lothar Collatz behutsam junge Mathematiker aus dem Höhenflug der Verallgemeinerungen zurück in die Wirklichkeit konkreter Mathematik führte. Auf dieser Tagung war ich übrigens nicht der Einzige, der diese Erfahrung machte. Ich erinnere mich an einen Vortrag über eine Konvergenztheorie zum Newton-Verfahren in flachkonvexen Banach-Räumen, bei dem es dem Vortragenden nicht anders erging als mir. Mit meinem Eindeutigkeitssatz hatte ich ein Gebiet betreten, auf dem Lothar Collatz mit einer Arbeit, die 1956 veröffentlicht wurde, bereits Pionierarbeit geleistet hatte. In dieser Veröffentlichung hat er, in Form eines Hilfssatzes, eine notwendige Bedingung für eine gleichmäßig beste Approximierende einer stetigen reellwertigen Funktion im Falle der endlich-dimensionalen linearen Approximation angegeben. Diese Bedingung spielt in der Theorie der gleichmäßigen Approximation eine zentrale Rolle. Ihre Hinlänglichkeit

für beste Approximierende hätte Herr Collatz in der genannten Arbeit mühelos mit Hilfe des Konzepts zur Gewinnung unterer Schranken für die Minimalabweichung einsehen können. Für ihn stellte sich jedoch ihre Notwendigkeit nur als ein Hilfsmittel dar, um einen Eindeutigkeitssatz für die gleichmäßige Approximation einer stetigen Funktion durch Linearformen auf einem strikt konvexen Gebiet beweisen zu können. In dieser zielgerichteten Entwicklung origineller Ideen, ohne ein völliges Ausbeuten ihrer Reichweite, scheint mir bei Herrn Collatz - wie bei anderen außergewöhnlichen Mathematikern - eine besondere Fähigkeit vorzuliegen. Das bereits genannte Konzept zur Gewinnung unterer Schranken für die Minimalabweichung beruht auf der Einführung sogenannter H-Mengen, einer frappierend einfachen Idee, die Herr Collatz später zunächst auf rationale und danach auf beliebige nicht-lineare gleichmäßige Approximation stetiger reellwertiger Funktionen ausgedehnt hat. Er schuf damit eine Basis für eine Entwicklung in der Approximationstheorie, die von seinen Schülern und Kollegen zur höchsten Blüte geführt wurde. Beispielsweise ist die Theorie der Extremalsignaturen eine konsequente Weiterführung der Collatz'schen Ideen.

Lassen Sie mich nochmals zu der bereits angeführten Oberwolfachtagung zurückkommen. Diese Treffen von Fachkollegen sind geprägt durch eine harmonische Atmosphäre und anregende Gespräche. Zu diesem Ruf des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach haben die Collatz-Tagungen wesentlich beigetragen. Neben einem energiegeladenen Mathematiker Lothar Collatz lernten die Besucher andere Qualitäten dieses Mannes kennen:

> Seine Leidenschaft beim Go-Spiel,
> seine Ausdauer bei ausgedehnten Wanderungen
> (manchmal zum Leidwesen der Teilnehmer),
> seine Freude an der Natur und sein Talent,
> die Eindrücke in Aquarellen festzuhalten.

Große Teile der linearen Approximationstheorie gingen in den nachfolgenden Jahren in der allgemeineren Optimierungstheorie auf. Collatz selbst entdeckte, daß man durch Verwendung von Dualitätssätzen der Optimierung auf einfache Weise zu besseren Ergebnissen gelangen kann. Das ändert aber nichts an der Nützlichkeit und Originalität seiner ursprünglichen Idee. Herr Collatz zählte zu denjenigen, die die fruchtbare Wechselwirkung von Optimierung und Approximation frühzeitig erkannten und konsequent verwendeten. In vielen seiner Arbeiten werden Optimierungs- und Approximationsmethoden in Verbindung mit Randmaximum- und Monotonie-Sätzen zur näherungsweisen Lösung von partiellen Differentialgleichungen und zur Gewinnung von Fehlerschranken ausgenutzt. Es bedarf allerdings der Erfahrung und des Einfühlungsvermögens eines Lothar Collatz, um mit ähnlichen einfachen Mitteln zu den gleichen Resultaten zu gelangen. Für Mathematiker, Physiker und Ingenieure sind die beiden Monographien, die er gemeinsam mit seinen Schülern zu diesem Themenkreis verfaßt hat, eine unerschöpfliche Fundgrube.

Die Nützlichkeit von Monotonie-Sätzen zur Abschätzung von Fehlern, die man bei der approximativen Lösung eines Problems notwendigerweise macht, hatte ich schon erwähnt. Für die Nichtmathematiker unter Ihnen will ich an einem Beispiel erklären, was Monotonie ist. Stellen Sie sich einen See vor, der im Winter zufriert. Der Gefrierungsprozeß verläuft im idealisierten Fall vom Ufer aus zur Mitte des Sees, d. h. mit steigender Kälte bewegt sich die Eisgrenze vom Rand des Sees zur Mitte. Man ist nun daran interessiert, zu wissen, in welchem Teil des Sees bei einer bestimmten Temperatur Wasser und in welchem Teil Eis ist. Das ist sowohl physikalisch wie auch mathematisch ein äußerst kompliziert zu lösendes Problem. Lothar Collatz stellt sich nun auf den Standpunkt, daß es für praktische Zwecke ausreicht, einen nach Möglichkeit kleinen Flächenstreifen im See zu kennen, in dem sich die Eis-Wasser-Grenze befindet - also Schranken für die wahre Lösung des Problems anzugeben. Dieser Flächenstreifen muß aber elementar mit einfachen Mitteln berechenbar sein. Dazu gibt es einen simplen, physikalisch einleuchtenden Trick. Wenn man für eine bestimmte Temperatur den Eisrand berechnen möchte, so ist sicher richtig, daß dieser zwischen den Rändern, die für je eine höhere und eine niedere Temperatur berechnet wurden, liegt. Das ist Monotonie!! Es kommt jetzt allerdings das Geschick von Lothar Collatz hinzu, die Vergleichstemperaturen so zu wählen, daß man erstens den zugehörigen Eisrand leicht ausrechnen kann und zweitens einen möglichst schmalen Fehlerstreifen erhält. Das möchte ich Ihnen nicht erklären.

Collatz hat die Verwendung von Monotonie-Prinzipien dieser Art auf ein sehr viel breiteres Anwendungsgebiet, das weit über das genannte Beispiel hinausgeht, ausgedehnt. Seine Arbeiten hierüber beginnen mit einer Publikation im Jahre 1952 über "Aufgaben monotoner Art". Das dargestellte Beispiel ist zeitlich viel jünger. Aufgaben mit freiem Rand, wozu dieses gehört, haben ihn erst in den letzten zehn Jahren intensiv

beschäftigt. Ich hatte das Glück, in diesem Zeitraum in zahlreichen Gesprächen mit Lothar Collatz viel über dieses neue Arbeitsgebiet zu lernen und mit ihm gemeinsam eine Tagung in Oberwolfach veranstalten zu dürfen, ein Erlebnis, an das ich gerne zurückdenke. Lernen konnte man vor allem, daß es in vielen praktischen Problemen ausreicht, eine gute Näherungslösung zu kennen, sofern man nur den Fehler abschätzen kann. Lothar Collatz vermittelt häufig diese Philosophie durch Erzählen von Spaßgeschichten, bei denen Mathematiker bisweilen schlecht abschneiden.

Früher war es üblich, daß zu Beginn einer Tanzstunde die Partner sich in einiger Entfernung gegenüber aufstellten. Um ein zu großes Durcheinander bei Beginn der Musik zu vermeiden, wird vereinbart, daß sich die Herren den Damen jeweils in Teilschritten um die Hälfte des verbleibenden Abstandes nähern. Da es sich hier um einen unendlichen Prozeß handelt, wird der Mathematiker enttäuscht den Saal verlassen, denn in endlicher Zeit kann er seine Partnerin nicht erreichen. Der Physiker hingegen ist zufrieden. Er kennt den Wert von Näherungslösungen mit Fehlerabschätzung und wird denken: "Nach 5 bis 6 Schritten bin ich meiner Partnerin so nahe, wie es für praktische Zwecke ausreicht."

Diesen Standpunkt sollte sich auch der Angewandte Mathematiker zueigen machen.

Durch die gesamte wissenschaftliche Tätigkeit von Lothar Collatz zieht sich wie ein roter Faden immer wieder das Gebiet der Differentialgleichungen. Tatsächlich hängen seine bisher dargestellten Forschungsaktivitäten im weiteren Umfeld auch mit Differentialgleichungen zusammen. Diesem Arbeitsgebiet gehörte seit seiner Promotion sein ungebrochenes Interesse. Bereits in den dreißiger Jahren gelangen ihm bahnbrechende Arbeiten zu Differenzen- und Mehrstellenverfahren. Er bereitete somit den Boden für spätere erfolgreiche Verwendung von automatischen Rechenhilfen im wissenschaftlich-technischen Bereich.

Die grundlegende Monographie "Numerische Behandlung von Differentialgleichungen", ein inzwischen in mehreren Auflagen erschienenes und in viele Sprachen übersetztes Buch, erschien bereits 1951. Darin gibt Collatz eine umfassende Darstellung der Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen mit Fehlerabschätzungen. Dieses Buch wendet sich vorallem auch an Ingenieure, und kann auch dort als

Standardwerk bezeichnet werden. Die mathematische Ausbildung von Ingenieuren hatte Lothar Collatz seit seiner Habilitation an der Technischen Hochschule Karlsruhe immer am Herzen gelegen. Einige seiner Bücher deuten dies bereits im Titel an:

Differentialgleichungen für Ingenieure (1949)
Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (1949).

Besonders weitreichenden Einfluß hatten seine Publikationen über Eigenwerte.

Ich will Ihnen wieder an einem Beispiel erklären, was ein Eigenwert ist. Stellen Sie sich ein schwingungsfähiges System vor - etwa eine Brücke. Ein solches System besitzt Schwingungsfrequenzen, die für das System charakteristisch sind. Das sind die Eigenfrequenzen oder Eigenwerte des Systems. Es ist in der Technik überaus wichtig, diese Zahlen zu kennen. Denn wenn man etwa eine Brücke zu erzwungenen Schwingungen anregt, deren Frequenz mit einer Eigenfrequenz der Brücke zusammenfällt, so kommt es zur Resonanzkatastrophe. Die Schwingungsamplituden der Brücke werden beliebig groß.

Collatz hat in einer Vielzahl von Arbeiten sehr genaue Einschließungsschranken für solche Eigenfrequenzen angegeben, die heute seinen Namen tragen. Seine Schüler und bereits die Schüler seiner Schüler haben diese Untersuchungen fortgesetzt. Mathematiker, Physiker und Ingenieure verfügen heute über ein umfangreiches Instrumentarium zur Abschätzung von Eigenwerten, das auf den Ideen von Lothar Collatz aufbaut.

Meine Damen und Herren, ich habe versucht, in äußerst vereinfachender und verkürzter Darstellung die wissenschaftliche Leistung von Lothar Collatz verständlich zu machen. Die Mathematiker mögen mir die unpräzise Ausdrucksweise und die subjektive Auswahl verzeihen. Eindrucksvoll dokumentieren bereits die Zahlen der Buchveröffentlichungen und Zeitschriftenartikel die wissenschaftliche Aktivität von Lothar Collatz:

8 Bücher zum Teil in mehreren Auflagen sind erschienen.
Mehr als 200 Fachpublikationen habe ich gezählt.

Bei der Ehrung eines Angewandten Mathematikers sollte unbedingt etwas über sein Verhältnis zu Computern gesagt werden. Lothar Collatz hat sehr früh die Bedeutung von automatischen Rechenhilfen für den Wissenschaftsbereich erkannt, ja sogar den Einsatz von Computern durch sein wissenschaftlliches Werk mit vorbereitet. Lange Zeit leitete er neben seinen Lehrstuhlverpflichtungen auch das Rechenzentrum der Universität Hamburg. Bei wissenschaftlichen Vorträgen, vorallem junger Mathematiker, pflegt Prof. .Collatz häufig die Frage zu stellen:
"Haben Sie auch numerische Beispiele?"

Blindwütiges numerisches Rechnen, dem man heute leider häufig begegnet, findet aber nicht seinen Beifall. Auch der heute mögliche Einsatz von Superrechnern würde ihn niemals davon abbringen, zunächst mit Bleistift und Papier einem Problem zu Leibe zu rücken. Erst wenn alle Eventualitäten durchdacht sind, kommt ein Rechner zum Einsatz.

Lieber Herr Collatz!

Sie konnten im Juli dieses Jahres im Kreise Ihrer Familie und Freunde Ihren 75. Geburtstag feiern. Für uns Mathematiker haben Sie sich in den vergangenen zwanzig Jahren kaum verändert. Sie sind noch immer voller Aktivitäten und Tatendrang. Wir wünschen Ihnen noch viele schöne mathematische Resultate.

Geometrische Ornamente

L. Collatz, Hamburg

Sehr verehrter Herr Präsident, Professor Dr. Becker,
sehr geehrter Herr Vizepräsident, lieber Herr Kollege Hoffmann,
sehr geehrter Herr Dekan, lieber Herr Kollege Grötschel,
lieber Herr Kollege Sprekels,
liebe Kollegen, meine sehr geehrten Damen und Herren.

Der Fakultät für Naturwissenschaft der Universität Augsburg möchte ich meinen herzlichen Dank für die Verleihung der Ehrendoktorwürde aussprechen; es ist für mich eine große Ehre, diese Auszeichnung gerade von dieser Fakultät zu erhalten, die in der kurzen Zeit ihres Bestehens in der ganzen Welt berühmt und hoch geachtet geworden ist. Zudem ist diese Ehrung für mich eine besondere persönliche Freude, da ich in der Fakultät mit vielen Personen seit langer Zeit bekannt und befreundet bin, und ich bin für die vielen anerkennenden und lieben Worte, die anläßlich der Verleihung gesprochen wurden, zu tiefem Dank verpflichtet, fühle mich aber zugleich auch ein wenig beschämt.

Es ist für einen Mathematiker wohl schwieriger als für die Vertreter der meisten anderen Wissenschaften, einen Fachvortrag zu halten, der nicht nur für die Vertreter des eigenen Faches, sondern auch für Personen verständlich ist, deren Interessen auf anderen Gebieten liegen.

Ein Geograph kann mit Berichten über Forschungen in anderen Ländern an allgemein bekannte Dinge anknüpfen und damit allgemeines Interesse finden oder entsprechend ein Mediziner mit einem Vortrag über Forschungen zur Bekämpfung von Krankheiten. Die Lebenserfahrung vieler Menschen bewirkt eine wenigstens vage Vorstellung von anderen Ländern und von Krankheiten, aber selten von den Forschungsgegenständen der Mathematiker, z. B. von Differentialgleichungen, um nur ein Wort zu nennen. Daher wird ein Mathematiker bei einem nicht für Spezialisten bestimmten Vortrag nur hoffen dürfen, allgemeineres Interesse zu finden, wenn er auf allgemein bekannte elementare Dinge zurückgreift. Als solche bieten sich Gegenstände der geometrischen Anschauung an, und daher möchte ich über geometrische Ornamente sprechen. Zugleich werden sich dabei für den Laien überraschende Gesetzmäßigkeiten zeigen, die jeder an vorliegenden Ornamenten unmittelbar nachprüfen kann; überdies ist das Gebiet trotz seines einfachen Zuganges auch mathematisch durchaus anspruchsvoll und weist, wie am Schluß des Vortrages ausgeführt werden soll, auch eine Fülle noch ungelöster mathematischer Probleme auf.

I. Verschiedene Arten von Ebenenteilungen

Im Lexikon findet man für Ornament die Erklärung: "Verzierung von Bauwerken und Gegenständen. Die Hauptmotive stammen aus dem Pflanzen- und Tierreich oder sind geometrisch". Dem Titel des Vortrages entsprechend möchte ich aber nur über "geometrische Ornamente" sprechen und nicht über Verzierungen, Mosaiken und dergleichen. Die hier betrachteten Ornamente bestehen in der Regel aus der Aneinandersetzung geometrischer Figuren nach bestimmten Gesetzen der Anordnung. Die Figuren werden häufig, aber nicht immer, geradlinig begrenzt sein ("Polygone"), z. B. Dreiecke, Vierecke, allgemein n-Ecke, und es soll ein gegebenees Gebiet G der Ebene "schlicht", d. h. ohne gegenseitige Überdeckungen, und "lückenlos", d. h. ohne daß Löcher übrigbleiben, mit Figuren, auch "Flächenstücke" oder kurz "Flächen" von einer oder von mehreren gegebenen Sorten,bedeckt werden. Gelegentlich sind auch Ornamente auf gekrümmten Flächen, z. B. auf einem Torus (Autoreifen), oder Flächen höheren Geschlechts untersucht worden (Bilinski [85]). So sind Rosetten, (z. B. Shubnikov - Koptsik [74], S. 27, Collatz [77], S. 34), Bandornamente (Shubnikov ... [74], S. 79, "Friesgruppen" Martin [82], S. 78, Klemm [82], S. 5, Collatz [77], S. 26), Streifenornamente, Säulenornamente, Schraubornamente auf abwickelbaren Flächen u. a. betrachtet worden. Hier sollen jedoch nur schlichte und lückenlose Aufteilungen der ganzen Ebene zugrundegelegt werden. Dabei mögen endlich viele Flächenstücke $F_1, F_2, ..., F_p$ zur Verfügung stehen, und jedes an der Ebenenteilung beteiligte Flächenstück möge zu einem dieser p vorgegebenen Flächenstücke kongruent sein.

Muster und Mosaiken wurden schon im Altertum bei Kunstbetrachtungen untersucht, aber auch in der Unterhaltungsmathematik (Ahrens [21]). Die Ausfüllung der Ebene durch kongruente Figuren von einer oder von mehreren Sorten fand nicht nur Interesse der Mathematiker (Löckenhoff [68], Davis-Grünbaum-Sherk [81], Klemm [82], Grünbaum- Shepard [83] u. a.) und Künstler (Escher [75], Bedeckung der Ebene mit schönen

Tierfiguren und Fabelwesen), sondern auch vieler Anwender, z. B. bei der möglichst abfallfreien Anordnung in Blechen, Platten aus Metall und Kunststoff zur Fertigung flächenschlüssiger Werkstücke (Heesch-Kienzle [63]) u. a. Zahlreiche Anwendungen gibt es in vielen naturwissenschaftlichen Disziplinen, Biologie mit Botanik, Physik, Chemie, Kristallographie, Ornamente an Kirchen und Gebäuden, auf Kleiderstoffen, Designs für Patchwork (z. B. Higgins [83]) usw. Zahlreiche geometrische Konstruktionen, auch komplizierterer Ornamente, sind bei K. Critchlow [83] ("Islamic patterns") beschrieben.

Es gibt sehr viele verschiedene Typen von Ebenenteilungen. Zu einer ersten groben Einteilung führt der Begriff der "Decktransformation". Der Ebenenteilung wird ein (unendlicher) Graph zugeordnet. In der Ebene liegen (unendlich viele) Punkte, auch Knoten oder Ecken genannt, und es ist festgelegt, welche Punktepaare durch ein Kante verbunden sind. Die Kanten brauchen nicht geradlinig zu sein; jede Kante hat als Endpunkte zwei Ecken, und es sollen sich niemals zwei Kanten überschneiden. Etwas präziser, es sollen niemals zwei verschiedene Kanten einen inneren Punkt gemeinsam haben. Die Kanten bilden die Ränder der Flächenstücke. Nun werden Bewegungen der Ebene betrachtet; es gibt "Elementarbewegungen":

1) die Verschiebungen,"Translationen" genannt, die durch einen Verschiebungsvektor v gekennzeichnet werden können derart, daß jeder Punkt der Ebene in der Richtung des Vektors v um eine feste Strecke verschoben wird, Bild 1a;
2) Drehungen um einen festen Punkt p um den Winkel $2\pi /q$ (dabei ist q eine ganze Zahl ≥ 2 (Bild 1b); für $q = 2$ ist die Drehung eine "Punktspiegelung";
3) Spiegelungen an einer Geraden g (Bild 1c).

"Bewegungen" der Ebene sind alle Transformationen, die durch Hintereinanderausführung von Elementarbewegungen erzeugt werden können. Durch Nacheinanderausführung der Spiegelung an einer Geraden und anschließende Verschiebung längs dieser Geraden entsteht eine "Gleitspiegelung" (z. B. in Bild 4).
Jede Bewegung der Ebene, welche den ganzen Graphen in sich überführt,heißt eine "Decktransformation".
Dann kann man bei Ebenenteilungen folgende Typen beobachten:

1) **Drehsymmetrische Teilungen** (z. B. Rosettentyp). Unter den Decktransformationen kommt eine Drehung, aber keine Verschiebung vor. Beispiele, auch mit unbeschränkten Bereichen und Punktspiegelungen (z. B. bei dem scheinbar spiralischen Muster) in Bild 2.

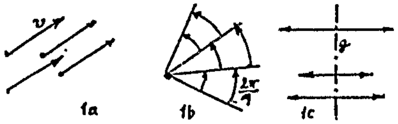


Bild 1

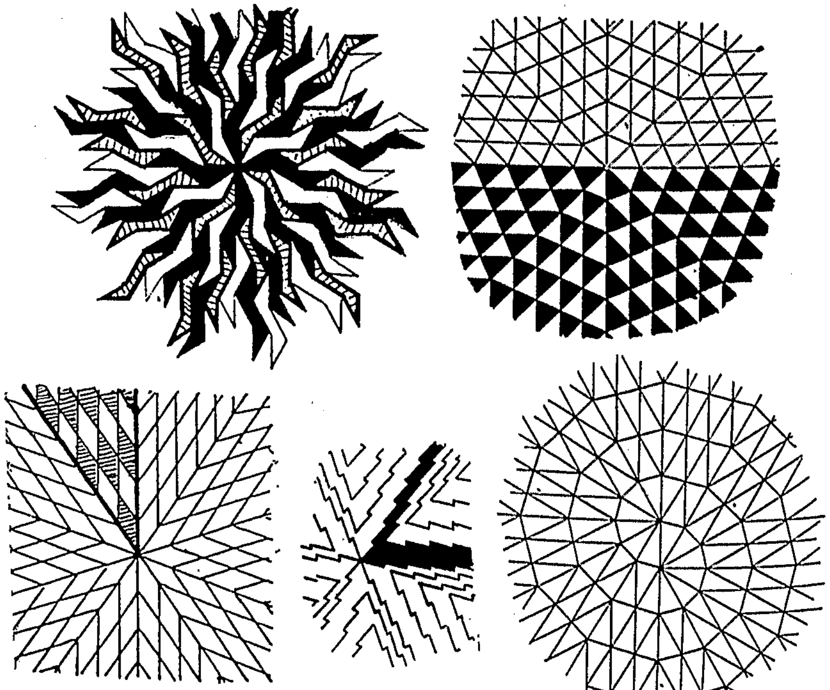


Bild 2

2) **Spiegelungstyp.** Unter den Decktransformationen kommt eine Spiegelung, aber keine Drehung und keine Verschiebung vor, Beispiel Bild 3.

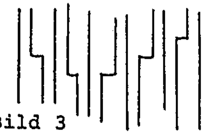


Bild 3

3) **Einfachperiodische Teilungen.** Die Teilung enthält unter den Decktransformationen Verschiebungen, aber nur in einer Richtung. Bild 4 und 5 geben Beispiele hierfür, teils (Bild 4) mit unbeschränkten Bereichen, Bild 4 mit und Bild 5 ohne Spiegelungen.

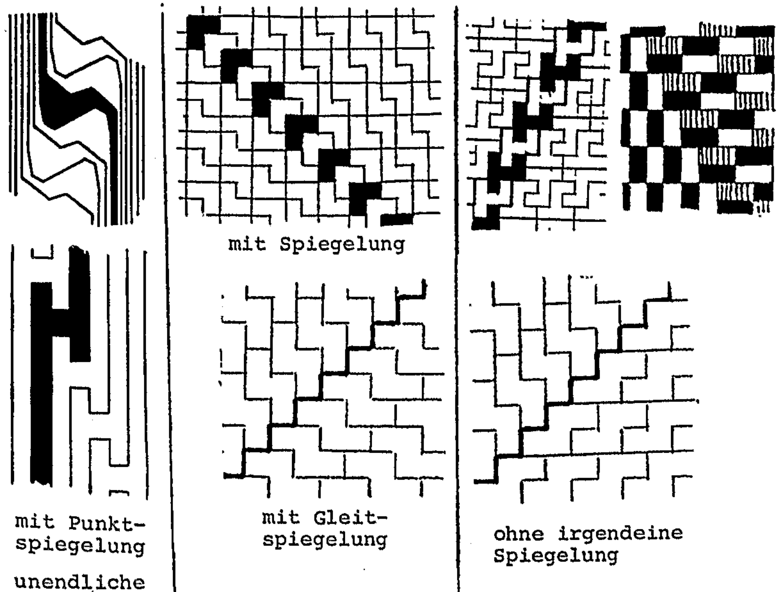
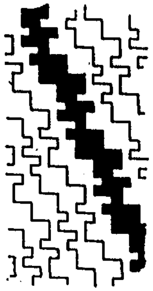
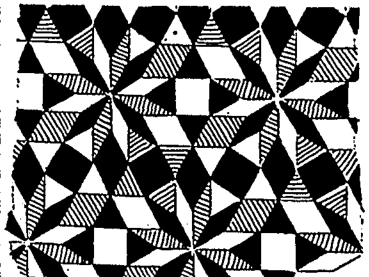


Bild 4

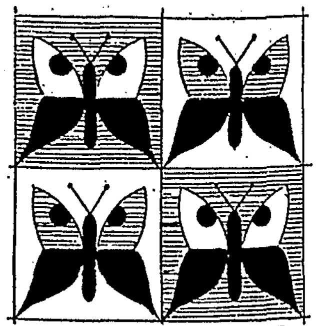
Bild 5

4) **Doppeltperiodische Teilungen.** Unter den Decktransformationen gibt es Verschiebungen in zwei verschiedenen Richtungen (mathematisch gesprochen: es gibt zwei voneinander linear unabhängige Translationsvektoren). Hiermit, und zwar mit beschränkten Flächenstücken als Bereichen, soll sich der Hauptteil des Vortrages beschäftigen; einfache Beispiele mit unbeschränkten Bereichen gibt Bild 6.

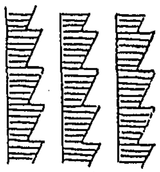


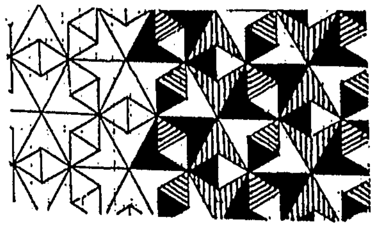


$4\cdot(12\ 3\ 5\ 3)$, $2\cdot(6\ 5\ 5)$
$2\cdot(6\ 5\ 3\ 5)$, 5^4, $2\cdot(5\ 5\ 3)$
[σ=9, p=11, N=40]

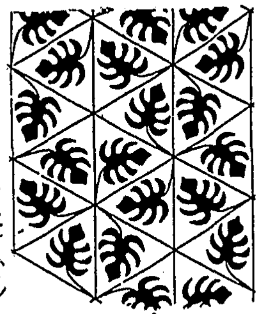


$8^4 3^3 54141453^3$, $8^2 5^2$,
$2\cdot(853)$, 554, $2(53^3)$,
$2\cdot(33)$,
[σ=12, p=9, N=42]

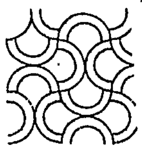




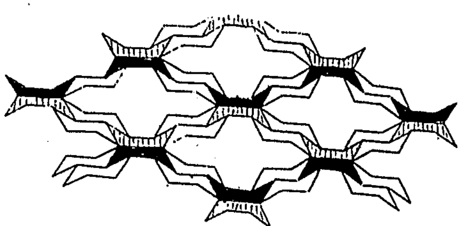
9693,933



996933
3



4343433
433



$2\cdot(553^4)$,533533, $4\cdot(5333)$

Bild 6

5) **Unsymmetrische Teilungen.** Es gibt weder eine Verschiebung, noch eine Drehung, noch eine Spiegelung als Transformation. Beispiel Bild 7. (Es ist ein Bandpaketornament)

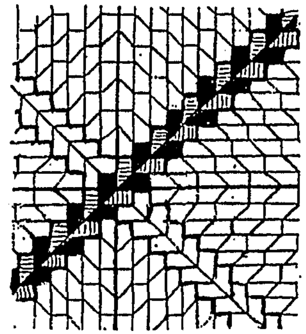
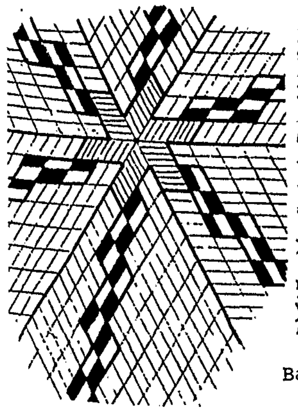
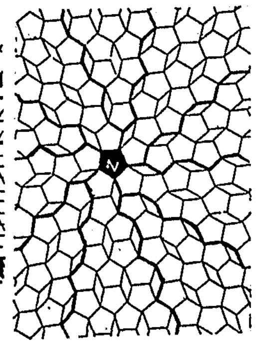


Bild 7

6) **Bandpaketornamente.** Bei diesen in Kirchen, Festsälen und dergleichen sehr häufig auftretenden Teilungen wird die Ebene mit einem Zentrum, mit einer endlichen Anzahl von Bändern und zwischen den Bändern liegenden Paketen bedeckt, wobei aber auch einer der drei Teile fehlen kann. Die Bänder sind dabei einfach periodisch, aber nur nach einer Seite (nach "außen"), und die Pakete besitzen zwei Verschiebungen in verschiedenen Richtungen, aber ebenfalls nur nach "außen", wie es wohl aus Bild 8 und 9 auch ohne längere Erklärungen verständlich ist. Bild 9 zeigt, daß das Zentrum auch fehlen kann.





Bandpakete
mit
Zentrum

Bild 8

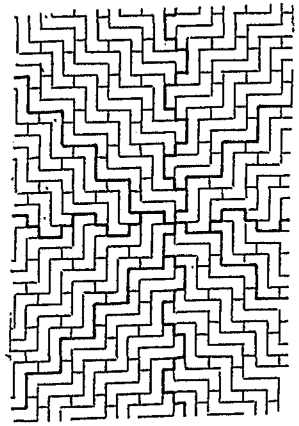


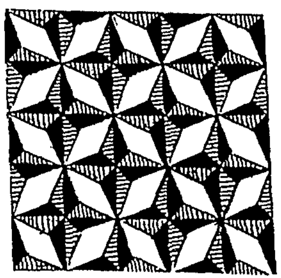
Bild 9 ohne Zentrum

Von jetzt ab sollen nur die doppeltperiodischen Teilungen betrachtet werden, solche Teilungen werden auch als Parkettierung, Pflasterung, Tiling, Paving, Muster, ... bezeichnet und werden hier schlechthin Ebenenteilungen genannt.

Beispiele für das Auftreten geometrischer Ornamente:

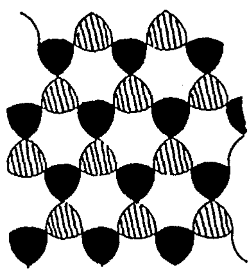
An fast allen Gebäuden , in fast jedem Zimmer, auf Bürgersteigen und Plätzen, an vielen Schränken u. a. kann man geometrische Ornamente beobachten. Man braucht nicht ins Ausland zu fahren (Bild 10 und 11); auch hier in Augsburg selbst kann man an den verschiedensten Stellen geometrische Ornamente finden. Sehr auffällig ist das Halbkreisbogenornament von weißen Pflastersteinen zwischen grauen Pflastersteinen am Kennedyplatz, Bild 12. In der Altstadt findet man das Straßenpflaster von Bild 17; vielerlei verschiedene Ornamente findet man bei Fußböden und Decken in Rathäusern, Ornamente auf dem Marmorboden des Goldenen Saales im Rathaus, Kirchen und anderen öffentlichen Gebäuden, Bild 13 - 18.

Sehr große Flächen sind beim Steinfußboden in der katholischen und auch in der evangelischen Kirche St. Ulrich mit dem Muster von Bild 19 bedeckt; sehr reich an Ornamenten sind auch die verschiedenen Holzfußböden im Schaezler Palais, Bild 20/21. Auch die an Kunstschätzen reiche Umgebung von Augsburg weist vielerlei Ornamente auf. Allein der Marmorfußboden der Stadtpfarrkirche Mariä Himmelfahrt in Landsberg am Lech zeigt verschiedene Ornamente, Bild 22.



PAVIA
IL DUOMO
(Steinfussboden)
4·(12 8 3)
12 3 12 3

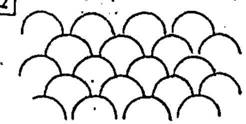
Bild 10



BUDAPEST
Matthiaskirche
Steinfussboden
4^6, $2\cdot(4^3)$

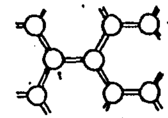
Bild 11

Bild 12



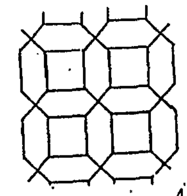
AUGSBURG 3^6
Kennedy-Platz
(Pflaster)
Bogen weiß,
dazwischen grau

16



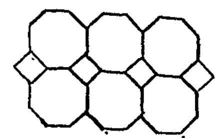
AUGSBURG
Kirche St. Peter
am Perlach 3^6
(Teppich)

19



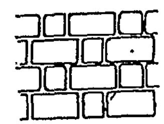
$2\cdot(433433)$, 3^4
AUGSBURG
kath. und evang.
Kirche St. Ulrich
(Steinfussboden)
sehr große Flächen)

13



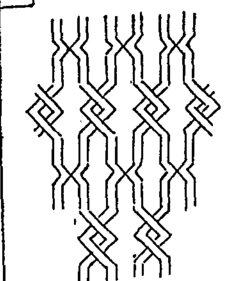
3^8, 3^4 (Holz)
AUGSBURG
Sitzungszimmer im
Rathaus
oberer Fletz (Decke)

17



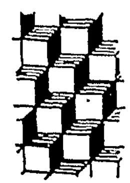
3^8, 3^4
AUGSBURG
Kirche St. Anna
Marmorfussboden.
Pflaster (Altstadt)

20



$2\cdot(43^3)$, $(433)^2$, 33, 33
$\sigma=9$, $p=5$, $N=28$
AUGSBURG
Schaezler-Palais
Festsaal
Holzfussboden

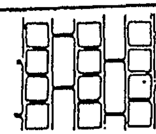
14



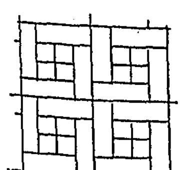
15

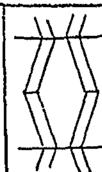
6363
AUGSBURG
Rathaus Goldener Saal,
Marmorboden

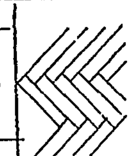
18



3^8, 3^5, 3^5
AUGSBURG
Basilika St. Ulrich
Krypta, Deckengewölbe, Ziegelsteine



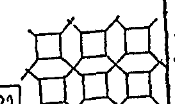




43^6, 43^3 | 443443 $2\cdot(4433)$ | 21 3^6

AUGSBURG
Schaezler Palais, Holzfussboden

22



$2\cdot(433433)$, 3^4 | 3^6 | 3^8, 3^4

Landsberg am Lech, Stadtpfarrkirche, Mariä Himmelfahrt
Marmorfussboden (große Flächen)

In und bei Augsburg

Die Abbildungen hier sind teilweise gegenüber den Originalen etwas stilisiert gezeichnet. Die Reihe der Beispiele ließe sich beliebig vermehren.

Die Schönheit der Ornamente wird im Original durch Verwendung verschiedener Farben, auf die wir hier verzichten müssen, oft noch sehr gesteigert.

II. Einelementige Ebenenteilungen

Um zu einer Einteilung und Klassifikation der möglichen Ebenenteilungen zu kommen, müssen wir festlegen, wann wir sagen wollen, daß zwei verschiedene Ebenenteilungen dieselbe Struktur haben; für diesen Zweck ist die graphentheoretische Struktur sehr geeignet. Wir hatten schon festgelegt, der Ebenenteilung einen (unendlichen) Graphen *G* zuzuordnen, der aus "Ecken" und "Kanten" besteht (vgl. Halin [80, 81]). Nun wird jeder Ecke ein "Eckengrad" ("Eckenkantigkeitsgrad" oder "Valenz") als die Anzahl der von dieser Ecke ausgehenden Kanten zugeordnet, und wir wollen es als wesentlich ansehen, welche Ecken miteinander durch eine Kante verbunden sind; aber wie die verbindende Kante verläuft, geradlinig oder gekrümmt (solange sich die Kanten nur nicht überschneiden), soll nicht als wesentlich betrachtet werden. Wir stellen uns etwa die Ebenenteilung als durch Gummifäden realisiert vor; wir sehen die Verknüpfung der Gummifäden als wesentlich an, wie die Gummifäden verknüpft sind und wieviele Gummifäden in einer Ecke (Knoten) zusammengeknotet sind; aber zwischen den Knoten sind die Gummifäden beweglich, sie können verzerrt und gedehnt werden.

Die Viereckssteilung

Als einfaches Beispiel werde die Viereckssteilung betrachtet, welche wohl zugleich die am häufigsten vorkommende ist. Bei der allbekannten Quadratteilung, Bild 23, kommen in jedem Knoten vier Kanten zusammen, jeder Knoten hat den Eckengrad vier, und wenn wir ein Flächenstück, hier also ein Quadrat, umlaufen und dabei die Eckengrade der Ecken notieren, also 4,4,4,4, so können wir jedem Viereck die "Signatur" 4444 zuordnen. Wenn wir nun nur die

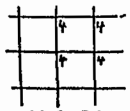


Bild 23

Verknüpfungsstruktur als wesentlich ansehen wollen, müssen wir auch den anderen in Bild 24 angedeuteten Ebenenteilungen dieselbe Signatur 4444 geben. Wenn wir nämlich der speziellen geometrischen Realisierung Rechnung tragen und z. B. die Verschiedenheit der Winkel berücksichtigen wollten, würden wir schon allein bei diesen Vierecken unendlich viele verschiedene Typen haben. Mit unserer Vereinbarung aber ordnen wir allen diesen Viereckssteilungen dieselbe Struktur zu. Das bedeutet, daß auch die in Bild 24 angegebenen Teilungen, die man

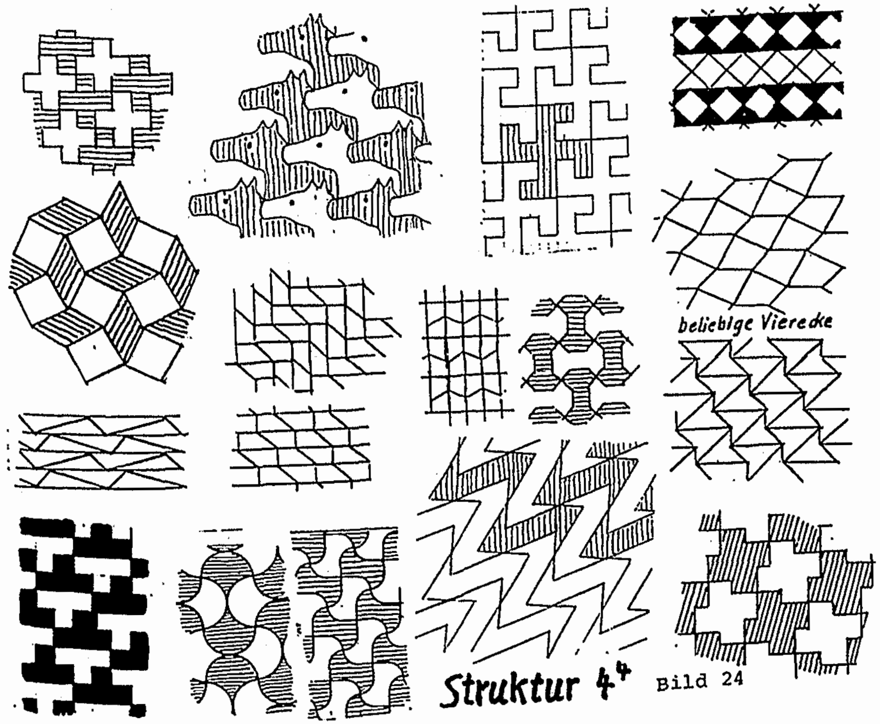


Bild 24

ebenfalls sehr häufig antrifft, zum Typ 4444, oder kürzer geschrieben 4^4, gehören. Nach unseren Verabredungen lassen wir aber auch Verzerrungen (topologische Transformationen) zu, sofern die Verknüpfungsstruktur nicht geändert wird. Mit Hilfe solcher Verzerrungen kann man z. B. auch den Übergang in Bild 25 vollziehen, mit welchem wir von Quadraten zu gleichseitigen Dreiecken übergegangen sind. Wir zählen bei jedem Flächenstück die Anzahl der Knoten als Ecken, und dann hat jedes der gleichseitigen Dreiecke auf seinem Umfange vier Knoten und wird daher als "topologisches Viereck" bezeichnet. Für uns ist nicht die geometrische Figur entscheidend, sondern wir werden es nur mit "topologischen n-Ecken" zu tun haben, und wenn wir von n-Ecken sprechen, meinen wir immer topologische n-Ecken. Wir bezeichnen also, abweichend vom üblichen Sprachgebrauch, die gleichseitigen Dreiecke in Bild 25 als Vierecke.

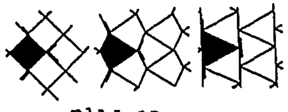


Bild 25

Die Sechsecksteilung

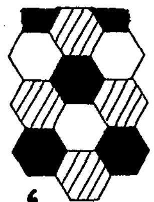

3^6

Bild 26

Neben der Vierecksteilung ist wohl die am häufigsten auftretende Ebenenteilung die Sechsecksteilung, am bekanntesten als "Honigwabenmuster", Bild 26. Auch hier nehmen wir gleich eine Verzerrung vor und kommen in Bild 27 zu dem überaus häufig auftretenden "Backsteinmuster" in der untersten Zeile von Bild 27. Hier hat jede Ecke den Eckengrad 3 und wir erhalten die Signatur 333333 oder kurz 3^6. Wie bei der Vierecksteilung kann auch die Sechsecksteilung sehr viele geometrisch verschieden aussehende Gestalten haben, wie man sie bei Pflasterungen auf Straßen und bei Holzfußböden in Schlössern und Rathäusern u. a. beobachten kann, Bild 28.

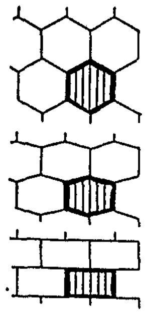


Bild 27

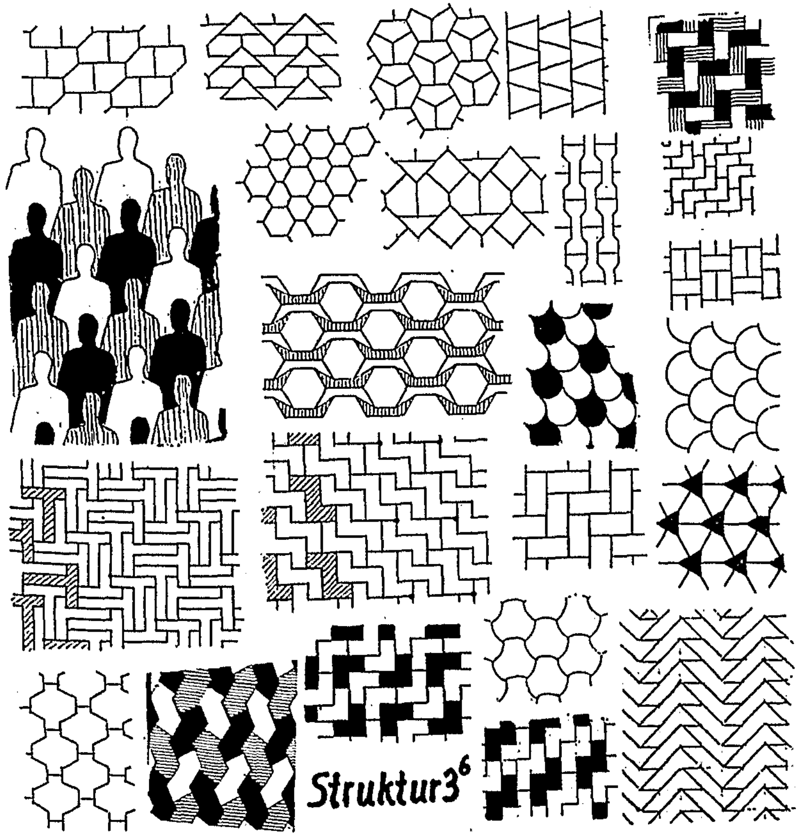


Bild 28

Einige Fünfecksteilungen

Eine ebenfalls sehr häufige, oft bei Steinfußboden vorkommende Ebenenteilung ist in Bild 29 angedeutet. Die Flächenstücke sind hier geometrisch betrachtet Rechtecke, aber der Struktur nach (topologische) Fünfecke und die fünf Knoten bei jedem Flächenstück haben Eckengerade 43433. Auch diese Struktur kann geometrisch sehr verschieden aussehende Realisierungen haben, Bild 30.

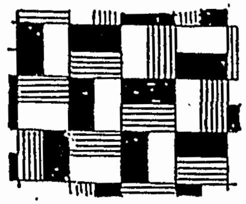


Bild 29

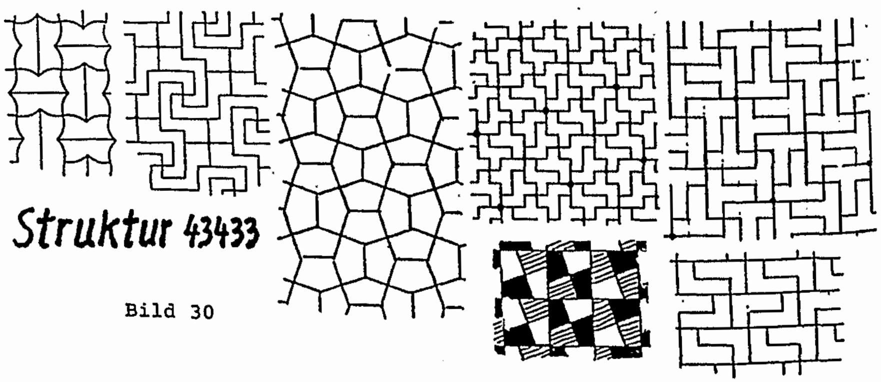


Bild 30

Daneben gibt es auch eine andere Struktur mit "Fünfecken", Bild 31, bei der die Flächenstücke als Fünfecke oder auch als Vierecke oder auch als noch andere geometrische Figuren realisiert werden können. Hierbei haben die Knoten beim Durchlaufen eines Flächenstückes die Eckengrade 44333; das ist eine andere Signatur als oben 43433, weil die Aufeinanderfolge der Zahlen eine andere ist. Bei dem letztgenannten Typ sind zwei Ecken mit dem Eckengrad 4 durch eine Kante verbunden, bei dem zuvor genannten Typ aber gibt es keine Kante, deren beide Endpunkte den Eckengrad 4 haben.

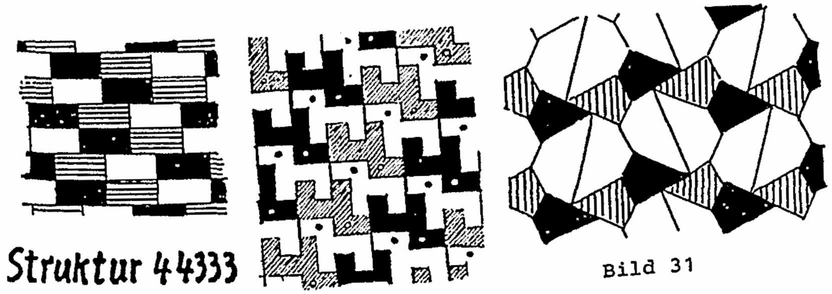
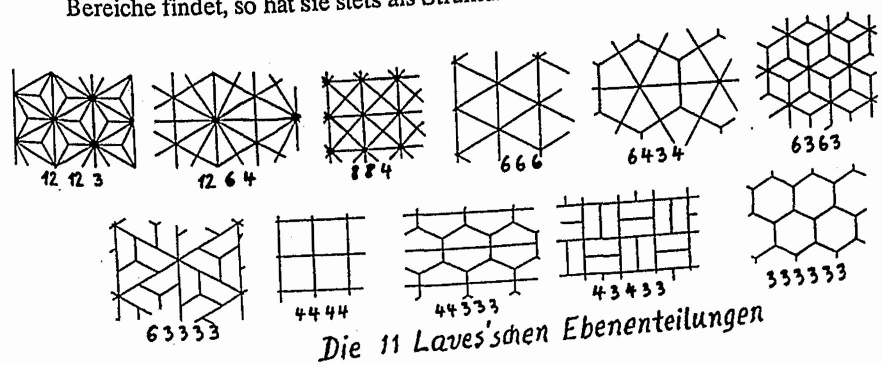


Bild 31

Die 11 Lavesteilungen

Somit haben wir schon vier verschiedene Strukturen kennengelernt. Nun ergibt sich die Frage, wieviele verschiedene Strukturen es überhaupt gibt, wenn man "einelementige" Ebenenteilungen zugrundelegt; das sind Teilungen mit der Eigenschaft: Wenn man zwei beliebige Flächenstücke der Teilung herausgreift, so gibt es stets eine Decktransformation, die das eine gewählte Flächenstück in das andere überführt.
Die Antwort dieser prinzipiell wichtigen Frage wurde 1931 von Laves [31] gegeben: Es gibt genau 11 solcher Strukturen, die berühmten 11 "Lavesteilungen", Bild 32. Der Beweis soll hier nicht vorgeführt werden, sondern kann in der Literatur nachgelesen werden. Das überraschende Ergebnis ist somit: Wenn man irgendwo eine beliebige, aber doppeltperiodische einelementige Aufteilung der Ebene in kongruente Bereiche findet, so hat sie stets als Struktur eine der 11 Lavesstrukturen.



Dreiecksteilungen

Ebenfalls häufig zu beobachtende Ebenenteilungen sind die Dreiecksteilungen, von denen einige in Bild 33 angedeutet sind. Sie gehören zu den Triangulierungen, die aus der Geodäsie bekannt sind. Auch in der Methode der finiten Elemente benutzt man bei ebenen Problemen häufig Dreiecksnetze. Hierbei sind auch schon "mehrelementige Ebenenteilungen", die in Kapitel III näher betrachtet werden, mit aufgeführt.

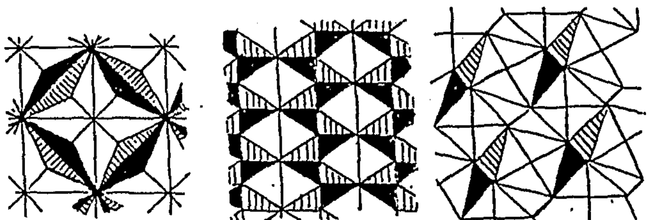


Bild 33

III. *Mehrelementige Ebenenteilungen*

Schon in Kapitel I waren uns Teilungen begegnet, bei welchen verschiedene Sorten von Stücken auftraten. Aber selbst, wenn alle Flächenstücke zueinander kongruent sind, braucht es keine einelementige Ebenenteilung zu sein; ein Beispiel gibt Bild 34. Hier gibt es z. B. keine Decktransformation, die das punktierte Rechteck in das schraffierte Rechteck überführt; es kann keine solche Transformation geben, weil das punktierte Rechteck die Signatur 43333, das schraffierte aber die Signatur 4433 hat; in unserer Sprechweise ist das punktierte Rechteck ein Fünfeck, das schraffierte Rechteck ein Viereck.

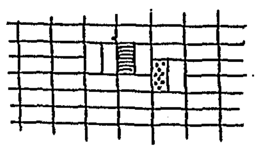


Bild 34

Das Tableau einer doppeltperiodischen Ebenenteilung

Wir gehen von einem Fundamentalbereich P aus, in Bild 36 ist er als Quadrat gezeichnet worden, was aber nicht nötig ist. In dem Fundamentalbereich können nun endlich viele, auch verschieden geformte Flächenstücke liegen, die wir mit $F_1, F_2, \ldots, F_p$ durchnumerieren. An jede Ecke schreiben wir den zugehörigen Eckengrad d .

Beispiel: Bild 36 zeigt als Bereich P ein Quadrat, welches in Flächen F_1, ..., F_5 aufgeteilt ist. An jeder Ecke steht der zugehörige Eckengrad. Durchläuft man den Umfang der Fläche F_1 , so passiert man die Knoten mit den Eckengraden 65363, entsprechend hat man für F_2 die Signatur 6535363; da man beim Durchlaufen des Umfanges die fünfstrahlige Ecke zweimal trifft, muß man auch die Zahl fünf zweimal hinschreiben; in unserer Sprechweise ist F_2 ein Siebeneck. Das so erhaltene Zahlenmaterial ordnen wir übersichtlich in Form eines "Tableaus" an, Bild 35.

F_j	Tableau	n_j
F_1	6 5 3 6 3	5
F_2	6 5 3 5 3 6 3	7
F_3	6 3 6 3	4
F_4	5 3	2
F_5	5 3	2

Bild 35

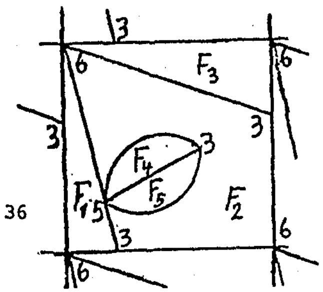


Bild 36

Nun formulieren wir dies allgemein: Der Fläche F_j , die etwa ein topologisches n_j-Eck sei, wird als "Signatur" (oder auch "Eckensignatur") die Zahlenfolge seiner n_j-Eckengrade:

$$d_{j1}, d_{j2}, \ldots, d_{jn_j} \qquad (d_{jk} \geq 1) \tag{3.1}$$

zugeordnet. Dabei durchläuft man die Ecken der Reihe nach und fängt mit einer solchen Ecke an und wählt den Umlaufsinn so, daß man bei den Zahlen d_{jk} mit möglichst großen Zahlen beginnt ("lexikographische Anordnung").

Bei der Aufstellung der Signatur können noch Besonderheiten auftreten. Eine Ecke mit dem Eckengrad 1 ist das Ende eines "Stieles", eine Ecke mit dem Eckengrad 2 ist eine "Scheinecke" und kann im allgemeinen einfach fortgelassen werden. Die beiden von ihr ausgehenden Kanten werden dann als eine einzige neue Kante aufgefaßt (bei gewissen Betrachtungen ist es nützlich, auch Scheinecken zuzulassen).

Beispiel: In Bild 37 ist für die Fläche F_2 , welche ein 10-Eck ist, die Signatur 5424333313.

Signaturen finden sich in vereinfachter Form schon bei Ahrens [21] , S. 125 - 144. Die Zahlen d_{jk} bilden das "Tableau" der Ebenenteilung

$$(3.2) \qquad \begin{pmatrix} d_{11} d_{12} \cdots d_{1n_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{p1} d_{p2} \cdots d_{pn_p} \end{pmatrix}$$

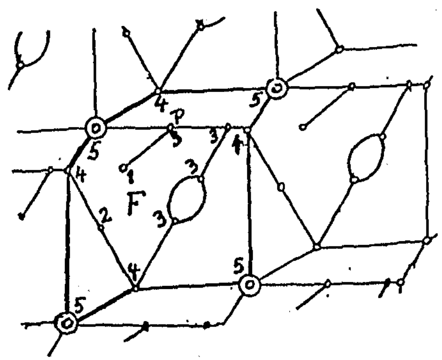


Bild 37

Die Anzahl der d_{jk} sei N .

Die Hauptformel

Bei dem Tableau ist neben den bereits eingeführten Zahlen N und p die "Reziprokensumme"

$$(3.3) \qquad \sigma = \sum_{j,k} \frac{1}{d_{jk}}$$

als Summe der Reziproken aller Zahlen des Tableaus wichtig. In dem Beispiel von Bild 36 haben wir $p = 5$ Zeilen für die fünf Flächenstücke und $N = 5 + 7 + 4 + 2 + 2 = 20$ Zahlen im Tableau, und die Reziprokensumme berechnet sich leicht zu
$\sigma = 1/6 + 1/5 + 1/3 + \ldots + 1/5 + 1/3 = 6 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/5 + 9 \cdot 1/3 = 5$. Wir beobachten, daß für diese drei Zahlen die Beziehung besteht

$$\sigma + p - \frac{1}{2} N = 0 .$$

Wir führen nun allgemein die "Invariante"

$$(3.4) \qquad \Phi = \sigma + p - \frac{1}{2} N = \sum_{j,k} \frac{1}{d_{jk}} + p - \frac{1}{2} N$$

ein. Dann wird sich zeigen, daß die Invariante stets gleich Null ist; es gilt nämlich der

Satz : Für jede doppeltperiodische zusammenhängende Ebenenteilung der betrachteten Art hat die Invariante den Wert Null, das heißt, es gilt die "Hauptformel"

$$(3.5) \qquad \Phi = \sigma + p - \frac{1}{2} N = 0$$

oder in Worten:

Summe der Reziproken aller Zahlen des Tableaus	+	Anzahl der Zeilen des Tableaus	= 1/2 •	Anzahl aller Zahlen des Tableaus

Idee des Beweises der Hauptformel

In diesem für Nicht-Fachleute geschriebenen Aufsatz sollen keine längeren Beweise vorgeführt werden, aber es interessiert vielleicht, wie man eine solche Formel beweisen kann. Man denkt sich eine beliebige Ebenenteilung aufgebaut, indem man vom Qaudrat als Fundamentalbereich ausgeht und schrittweise jeweils Ecken und Kanten hinzufügt.

Fügt man am Rande des Bereiches B eine Scheinecke hinzu, so tritt sie wegen der Periodizität noch ein zweites Mal am Rande auf, Bild 38; es kommt daher im Tableau an zwei Stellen je eine Zahl "2" hinzu und die Reziprokensumme σ wird um 1 größer; die Anzahl p der Flächenstücke ist unverändert geblieben, aber die Anzahl N der Zahlen im Tableau ist um 2 gewachsen; insgesamt hat sich also die Invariante ϕ nicht geändert. Die Überlegung verläuft ähnlich, wenn eine Scheinecke im Innern des Bereiches B hinzugefügt wird. In entsprechender Weise muß man feststellen, wie sich die Zahlen σ, p und N ändern, wenn man einen Stiel anbringt oder wenn man zwischen zwei Ecken, die noch nicht miteinander verbunden waren, eine Kante einfügt, oder wenn man an einer Ecke eine Schlinge F anbringt, Bild 39. Bei jeder der genannten Erweiterungen des Graphen bleibt die Invariante ungeändert und behält den Wert 0; dasselbe gilt auch bei Einführung mehrfacher Kanten (z. B. in Bild 39 zwischen den beiden Kanten mit dem Eckengrad 3).

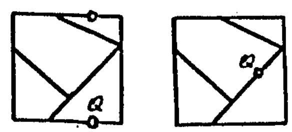
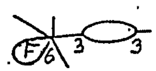


Bild 38

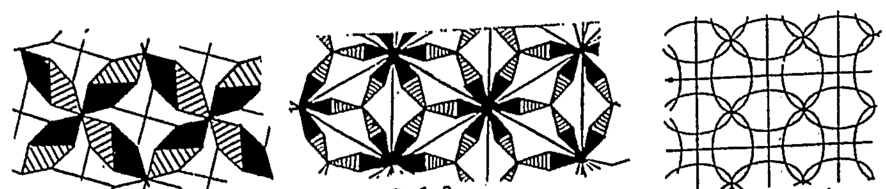
Bild 39



Da man jeden beliebigen (endlichen) Graphen im Fundamentalbereich auf diese Weise aufbauen kann, ist die Invariante stets Null. Die Einzelheiten des Beweises stehen bei Collatz [86].

Für eine speziellere Klasse von Ornamenten (insbesondere ohne Stiele, ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten) kann die Hauptformel auch mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes bewiesen werden, wie es bei Collatz [75], Seite 35 ff. durchgeführt wurde. Hier wird eine allgemeinere Klasse von Ornamenten betrachtet; z. B. bei Bild 37 ist der Eulersche Satz nicht unmittelbar anwendbar; es mußte auch vorher genauer die Zählweise bei der Signatur festgelegt werden.

Symmetrien: Wenn die Ebenenteilung eine Realisierung hat, bei der es außer den Translationen noch Drehungen, Spiegelungen oder Gleitspiegelungen gibt, welche die Ebenenteilung in sich überführen, so kann man einen Teilbereich B* von B, den "Grundbereich" betrachten, der die Eigenschaft hat, daß man aus B* und den aus B* durch die genannten Transformationen hervorgehenden Bereichen die Ebene schlicht und lückenlos überdecken kann. Man kann sich dann bei der Aufstellung des Tableaus auf die Flächen von B* beschränken. Fig. 40 zeigt einige einfache Beispiele hierfür.



83433
8333

18 18 3 6 3
18 3 3,6 3 3

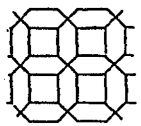
Bild 40

$84^4, 84, 4^4$

Einfachere Schreibweise beim Tableau

Wiederholt sich bei der Signatur einer Fläche k-mal eine Gruppe $c_1 c_2 \dots c_r$ von Zahlen, so werde dafür $(c_1 c_2 \dots c_r)^k$ geschrieben, also z. B. 4^4 an Stelle von 4444 und $6(53)^3$ an Stelle von 6535353.
Ein Faktor m vor der Signatur bedeutet, daß die betreffende Signatur m-mal angeschrieben werden soll, z. B.

$$\begin{pmatrix} 2[(4\,3^2)^2] \\ 3^4 \end{pmatrix} \text{ steht für } \begin{pmatrix} 4\,3\,3\,4\,3\,3 \\ 4\,3\,3\,4\,3\,3 \\ 3\,3\,3\,3 \end{pmatrix} \text{ vgl. Figur:}$$



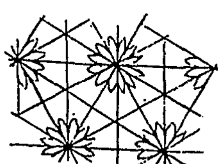
Aus der Hauptformel ergibt sich ein sehr wichtiges

<u>Lemma:</u> Die Reziprokensumme s einer jeden doppeltperiodischen Ebenenteilung ist ein ganzzahliges Vielfaches von 1/2.

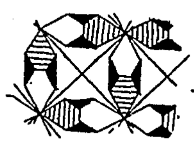
Das folgt unmittelbar aus (3.5), da p und N ganzzahlig sind.

Das Bilden der Reziprokensumme σ ist daher ein wichtiges einfaches Mittel zur Kontrolle. Wenn σ nicht ein ganzzahliges Vielfaches von 1/2 ist, liegt ein Fehler in der Aufstellung des Tableaus vor. Ferner: Es kann z. B. keine einelementige Ebenenteilung mit dem Tableau 44343 geben, da für diese $\sigma = 17/12$ ein ganzzahliges Vielfaches von 1/2 wäre.

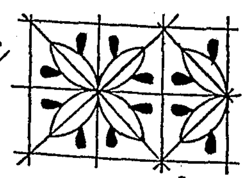
Es empfiehlt sich, die Hauptformel an vielen speziellen Ebenenteilungen nachzurechnen.



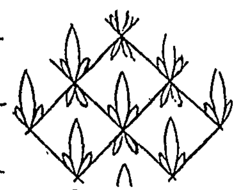
36 36 6 4
36



12 4 12 33
12 3^4, 3^3



16 4 8 4^3
16 4 4,4



14^9
2·(14),2·(14),14

Bild 41

IV. Charakteristik einer Ebenenteilung

Die kleinste bei einer Ebenenteilung vorkommende Eckenzahl eines Flächenstückes heißt die Charakteristik γ der Teilung

(4.1) Charakteristik $\gamma = \operatorname{Min}_j n_j$ (j=1,...,p) ;

bei Auftreten einer Schlinge ("loop" oder "Eineck") ist die betreffende Zahl $n_j = 1$ und damit auch die Charakteristik $\gamma = 1$.

Nimmt man bei einer Ebenenteilung alle Stiele mit den dazugehörigen Endpunkten und alle Scheinecken fort, so heißt die Ebenenteilung "gereinigt".

Eine Ebenenteilung ist also genau dann gereinigt, wenn alle $d_{ij} \geq 3$ sind.

Dann gilt der

<u>Satz:</u> Bei jeder gereinigten Ebenenteilung ist die Charakteristik γ höchstens 6: oder als Formel

(4.2) $d_{ij} \geq 3$ ergibt $\gamma \leq 6$.

Der Beweis ist leicht mit Hilfe der Hauptformel zu erbringen, vgl. etwa Collatz [86].

Somit ergibt sich eine Einteilung der doppeltperiodischen Ebenenteilungen nach der Charakteristik γ

$\gamma = 1$	$\gamma = 2$	$3 < \gamma < 6$	$\gamma > 7$
es treten Schlingen auf	es treten Mehrfachkanten, aber keine Schlingen auf	es treten keine Schlingen und keine Mehrfachkanten auf. Dies enthält die "normalerweise" betrachteten Teilungen, die aber noch ungereinigt sein können.	die Teilung ist ungereinigt

Bild 42 gibt Beispiele für Ebenenteilungen mit den Charakteristiken $\gamma = 1,2,\ldots,7,10$.

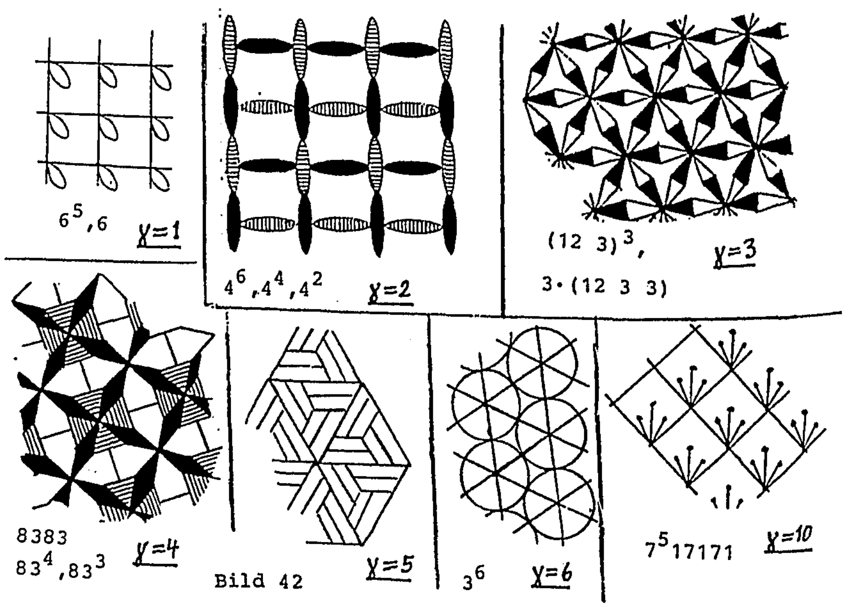


Bild 42

Die Frage, wie groß die Charakteristik sein kann, beantwortet das

Lemma: Bei ungereinigten Ebenenteilungen kann die Charakteristik beliebig groß sein (Beweis bei Collatz [86]).

Das Tableau dient auch zur übersichtlichen lexikographisch geordneten Auflistung der Ebenenteilungen in einem Katalog, der sich auf gereinigte Teilungen ohne Aufzählung aller Isotope beschränkt. Bild 32 zeigt $p = 1$. Als Beispiel für $p = 2$ sei genannt:

Auszug aus dem Katalog für $\gamma \geq 3$, $p = 2$, $d_{jk} \geq 3$.

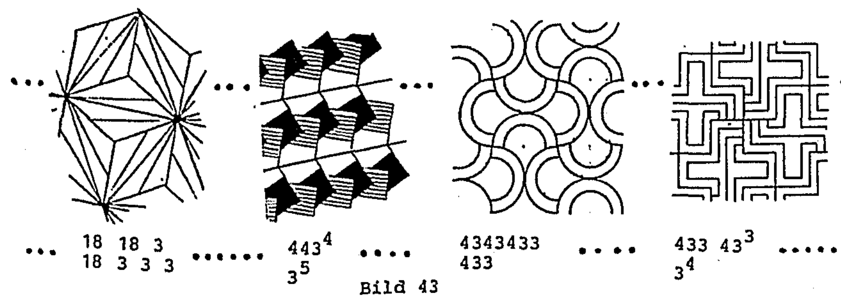


Bild 43

V. Familien und Kernrang

Am Anschluß an das Tableau (2.2) der Ebenenteilung werden einige weitere Definitionen gegeben:

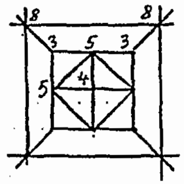
Definition der Menge N

Es wird eine Menge N eingeführt, welche alle d_{ij} enthält und zwar jedes so oft, wie es in dem Tableau vorkommt; dabei sollen die d_{ij} der Größe nach geordnet sein.

Beispiel: Fig. 44. Die Charakteristik ist $\gamma = 3$ und die Zeilenzahl beträgt ebenfalls $p = 3$. Das Tableau lautet:

$$\begin{pmatrix} 8\,8\,3\,5\,3 \\ 5\,5\,4 \\ 5\,5\,3 \end{pmatrix}$$

Bild 44



Die Menge N lautet hier

$$N = \{8,8,5,5,5,5,5,4,3,3,3\} \ .$$

Definition der Menge F

Die Menge F enthält dieselben Zahlen wie N , aber jede nur einmal, im Beispiel

$$F = \{8,5,4,3\} \ .$$

Definition von Isonomen und Isotopen

Zwei verschiedene Ebenenteilungen mit derselben Menge N heißen "Isonome", zwei topologisch verschiedene Ebenenteilungen mit demselben Tableau heißen "Isotope".

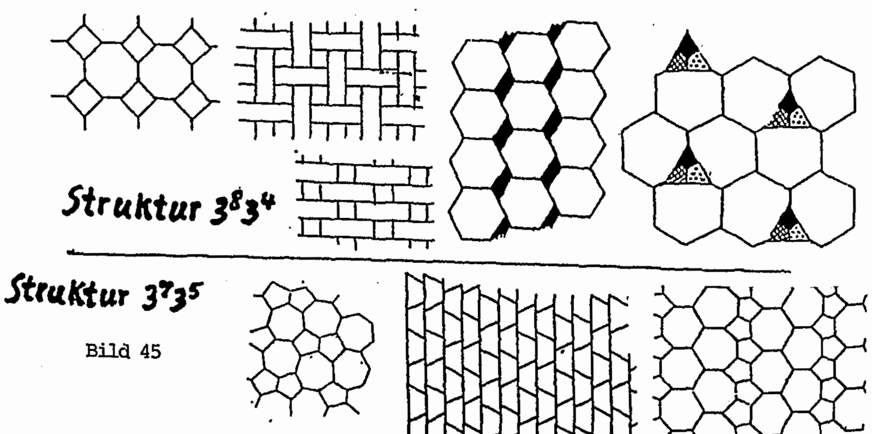


Bild 45

Bei den Lavesteilungen tritt das Phänomen der Isotope noch nicht auf, wohl aber bei zweielementigen Ebenenteilungen, z. B. bei den Strukturen $3^8, 3^4$ und bei der Struktur $3^7, 3^5$, vgl. Bild 45. Bei mehrelementigen Teilungen kann es sehr schwierig sein, zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Teilungen mit demselben Tableau topologisch verschieden sind oder nicht (vgl. Collatz [75], S. 41 - 45).

Definition der Familie

Alle Teilungen , die dieselbe Menge F haben, bilden eine Familie.

Beispiel: Die Familie $F = \{6,3\}$ enthält von den Laves-Teilungen die Teilungen mit dem Tableau 6363 und 63333 und z. B. auch Bild 46 mit dem Tableau

63^6

$63^4, 3^4$

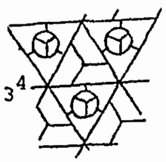


Bild 46

Beispiel: Bei $p = 2$ Zeilen im Tableau und Charakteristik $\gamma \geq 3$ gibt es 23 Familien mit 38 Klassen von Isonomen.

Eine Familie F wird durch ihre Zahlen k_j gekennzeichnet:

(5.1) $$F = \{k_1, k_2, \ldots, k_s\} \text{ mit } k_1 > k_2 > \ldots > k_s \geq 1 \ .$$

Definition: Bei der durch (5.1) gegebenen Familie F heißt s die "Stärke" der Familie.

Bei der Familie F bilden die Teilungen mit der Charakteristik $\gamma \geq 3$ den "Kern" der Familie. Der "Kernrang" r_k der Familie F ist die kleinste Zeilenzahl p , die im Kern der Familie vorkommt.

Es werden nun noch einige Sätze ohne Beweise genannt (Beweise bei Collatz [86]):

Lemma: Eine vorgegebene Teilung gehöre zur Familie F mit (5.1); in ihrem Tableau möge die Zahl k_i genau a_i - mal vorkommen (mit $a_i \geq 1$). Dann gilt für die Zeilenzahl p

(5.2) $$2p = \sum_{i=1}^{s} a_i \left(1 - \frac{2}{k_i}\right).$$

Hat überdies die Familie die Stärke $s = 1$ (also $F = \{k_1\}$), so besteht zwischen Zeilenzahl p und Anzahl N der Zahlen im Tableau die Beziehung

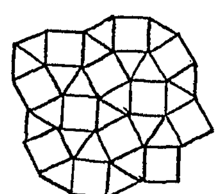
(5.3) $$p = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k_1}\right)$$

Folgerung: Für eine Familie der Stärke $s = 1$ gilt bei einzeiligem Tableau ($p = 1$)

(5.4) $$1 = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k_1}\right)$$

Diese Formel ist nur für $k_1 = 3,4,\dots,6$ (die bekannten Laves-Teilungen) erfüllbar; die Familien $\{5\}$, $\{7\}$, $\{k_1\}$ mit $k_1 > 6$ enthalten keine Teilung mit $p = 1$.

Beispiel: $k_1 = 5$: Familie $F = \{5\}$. Hier ergibt (5.3) $p = \frac{3}{10} N$; mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen p, n muß man $N = 10$, $p = 3$ wählen, Bild 47. Das Tableau, dessen sämtliche Zahlen 5 sind, muß also mindestens 3 Zeilen haben. Bild 47 zeigt eine Realisierung mit $p = 3$, der Kernrang der Familie $\{5\}$ ist also 3 .



5^4, $2(5^3)$

Bild 47 p=3

Existenzsatz: Die Familie

$$F = \{k_1, k_2, \dots, k_s\} \text{ mit (5.1)}$$

existiert (d. h. läßt Realisierungen zu) genau dann, wenn $k_1 \geq 3$ ist.

Existenzsatz: In jeder Familie

$$F = \{k_1, k_2, \dots, k_s\} \text{ mit (5.1)}$$

und mit $k_1 \geq 3$ existiert eine Realisierung mit der Charakteristik 2 (also mit Mehrfachkanten) und auch eine Realisierung mit der Charakteristik 1 (d. h. mit Schlingen). Bild 48 erläutert dies für die Familie F{7,4,3} .

$(773)^2$, 2(77), 2(77)

$(73443)^2$, 2(44)

$\gamma = 2.$

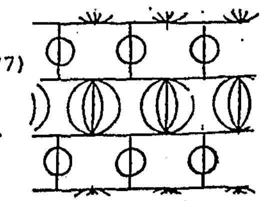


Bild 48

Rangbestimmung in weiteren Fällen

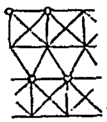
Die Rangbestimmung bietet Interesse, wenn man wissen möchte, wieviele Zeilen das Tableau mindestens haben muß, um bei gegebener Familie F eine Realisierung mit gegebener Charakteristik erwarten zu können.

Die Bestimmung des Kernranges r_k kann bei großen Werten der Stärke s schwierig werden; im Falle $s = 2$, also $F = \{k_1, k_2\}$ sind in der folgenden Tabelle die Kernränge für einige Paare von Zahlen k_1, k_2 angegeben.

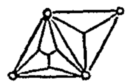
Kernrang r_k der Familie $F = \{k_1, k_2\}$

$k_1 =$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_2 = 3$	1	2	1	3	2	2	3	6	1	7	4	3	5
$k_2 = 4$	-	2	2	3	1		3		2				
$k_2 = 5$	-	-	4	4	3	8							

Bild 49 gibt für einige dieser Familien Realisierungen mit kleinstmöglichem Kernrang. Sicherlich wird man noch leicht einige in der Tabelle leer gebliebene Felder mit den dazugehörigen Rangzahlen ausfüllen können; aber eine allgemeine Methode zur Ermittlung der Rangzahlen scheint noch auszustehen.



F = {7,4}
777 p=3
774 r_k=3
774



F = {15,3}
15 15 3
15 15 3 p=3
15 3^3 r_k=3

Bild 49

Ausfüllung der Ebene mit Flächen vorgegebener Kantenzahlen

Eine verwandte Fragestellung lautet: Kann man die Ebene ausfüllen mit Polygonen vorgeschriebener Kantenzahlen, z. B. mit Dreiecken, Siebenecken und Zehnecken? Hierfür gilt der Satz: (Beweis bei Collatz [75], S. 39/40)

Satz: Seien $a_1 < a_2 < ... < a_n$ gegebene positive ganze Zahlen mit der einzigen Bedingung

$$3 \leq a_1 \leq 5;$$

dann existiert eine Familie von Ebenenteilungen mit $F = \{a_1,...,a_n\}$. Man kann ein a_1-Eck, ein a_2-Eck, ... und ein a_n-Eck derart angeben, daß man mit diesen (topologischen) a_s-Ecken die Ebene schlicht und lückenlos überdecken kann, wobei für jedes $s = 1,2,...,n$ alle a_s-Ecken einander kongruent sind.

Als Beispiel zeigt Bild 50 die Ausfüllung der Ebene mit Fünfecken und n-Ecken für alle Zahlen n mit $3 \leq n \leq 10$.

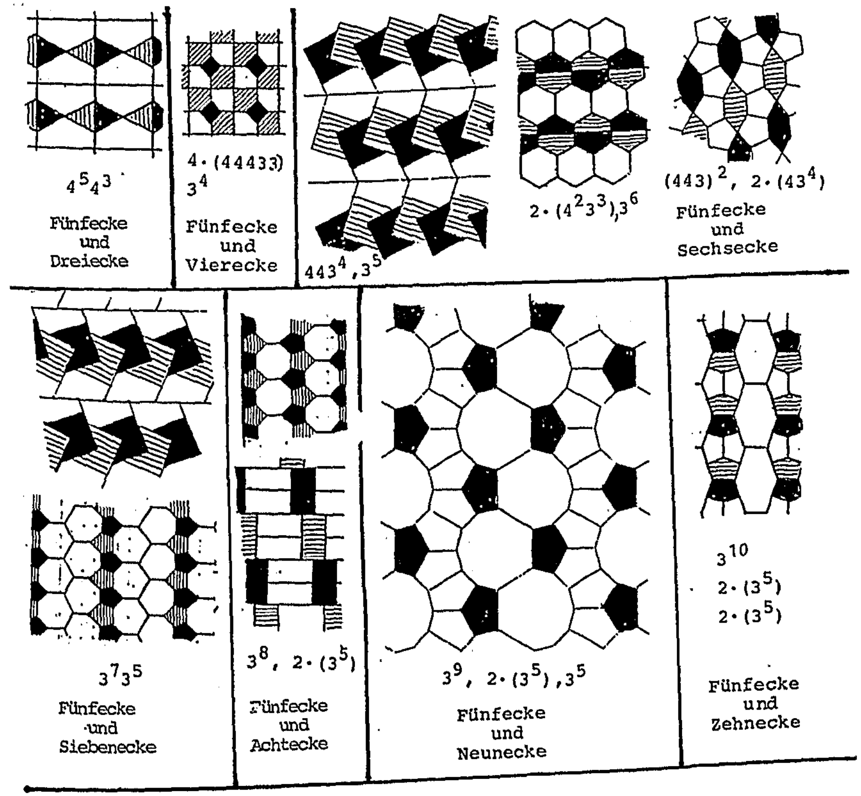


Bild 50

Regelmäßige Vielecke

Die Ornamente sehen oft besonders schön aus, wenn regelmäßige Polygone verwendet werden, entweder als ganze Flächenstücke oder in Flächenstücke zerlegt. Da es käuflicheZeichenschablonen für regelmäßige n-Ecke gibt (für $n = 5,6,\ldots,10$ und 12), kann man die betreffenden Ornamente dann auch sehr leicht und genau zeichnen. Bild 51 gibt einige Beispiele.

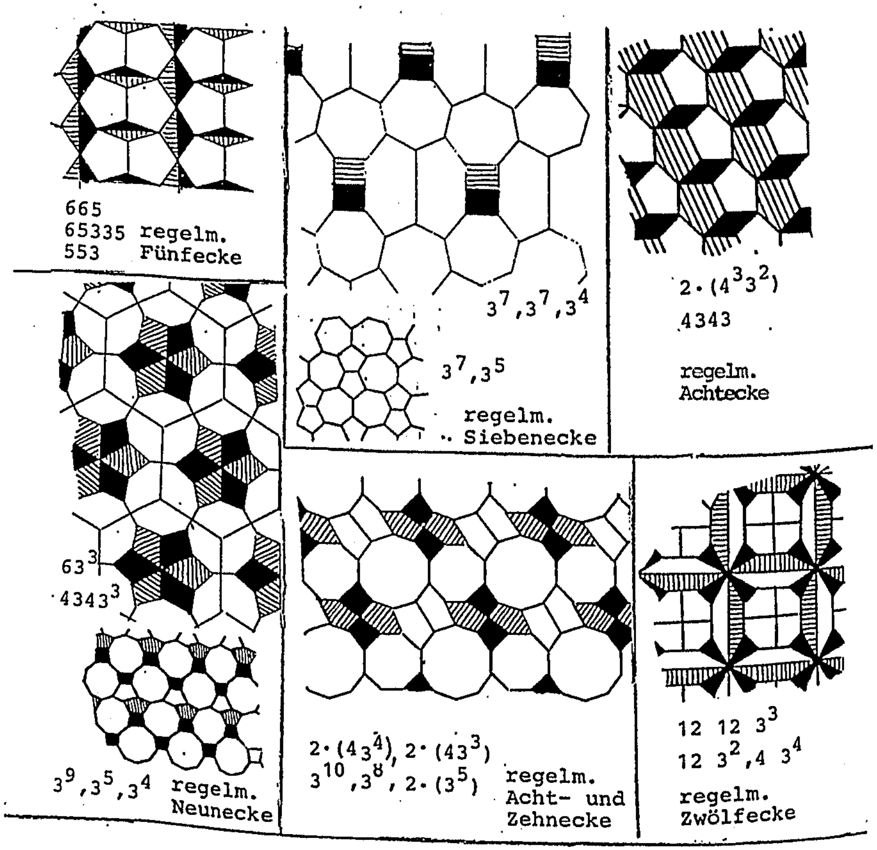


Bild 51

VI. Einige weitere Probleme

1. Färbung der Ebenenteilung (vgl. etwa Fiorini-Wilson [77], Wieting [82] u. a.). Wenn alle $d_{jk} \geq 3$ und geradzahlig sind, kommt man bekanntlich mit zwei Farben aus (stets im klassischen Sinne, daß an jeder Kante zwei Flächen verschiedener Farben aneinander stoßen). Wenn eine Zeile im Tableau nur Dreien enthält und zwar in ungerader Anzahl, braucht man vier Farben zur Färbung der Ebenenteilung. Kann man allgemein aus dem Tableau allein erkennen, ob drei oder vier Farben nötig sind, und wenn ja, wie lautet die Bedingung dafür?

2. Bestimmung der Kernrangzahlen auch in allgemeineren Fällen, insbesondere bei Familienstärken $s \geq 3$.

3. Gegeben sei ein Tableau, welches die Formel (3.5) erfüllt. Wie kann man erkennen, ob es eine Ebenenteilung gibt, die zu diesem Tableau gehört und wie kann man gegebenenfalls eine solche Ebenenteilung konstruieren? (Beispiel: Die Tableaus (12,6,4) und (10,5,5) erfüllen beide (3.5); zu (12,6,4) gibt es eine Ebenenteilung, zu (10,5,5) aber nicht).

So erweisen sich die geometrischen Ornamente auch als ein interessantes und anspruchsvolles mathematisches Gebiet, auf dem es noch viele offene Fragen gibt; das Ziel dieses Aufsatzes aber war es im wesentlichen, bei den Lesern etwas Freude an geometrischen Ornamenten zu wecken und sie nach Möglichkeit auch anzuregen, selbst Ornamente zu entwerfen und zu zeichnen.

Meiner lieben Frau Martha möchte ich herzlich für ihre sorfältige und mühevolle Hilfe bei der Herstellung der Zeichnungen danken.

Literatur

Ahrens, W. [21] Mathem. Unterhaltungen und Spiele, Leipzig und Berlin 1921, Bd. I, 400 S.

Bilinski, S. [85] Die quasiregulären Polyeder vom Geschlecht 2. Österr. Akad. d. Wiss., Sitzungsber. Abt. II, 194, 63 - 78.

Collatz, L. [75] *Einige Beziehungen zwischen Graphen, Geometrie und Kombinatorik*, Intern. Ser. Num. Math. 29 (1975) S. 27 -56.

Collatz, L. [77] Graphen bei Ornamenten und Verzweigungsdiagrammen, Intern. Ser. Num. Math. 36 (1977) S. 23 - 46.

Collatz, L. [86] Strukturen geometrischer Ornamente, Journ. of Geometry, erscheint demnächst.

Critchlow, K.[83] Islamic Patterns, An Analytic and Cosmolocical Approach, Thames and Hudson 1983, 192 S.

Davis, Ch. - B. Grünbaum - F. A. Sherk [81], Editors of "The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift", Springer 1981, 598 S.

Escher, M. C. [75] Graphik und Zeichnungen, Heinz Moos Verlag, 11. Aufl. 1975, 95 S.

Fiorini, S. - R. J. Wilson [77] Edge Colourings of Graphs, Pitman 1977, 154 S.

Grünbaum, B. - G. C. Shepard [83] Tilings, Patterns, Fabrics and Related Topics in Discrete Geometry, DMV Jahresbericht, 85 (1983) 1 - 32.

Grünbaum, B. - G. C. Shepard [86] Tilings and Patterns, ein Kompen- dium von etwa 640 Seiten, angekündigt für Nov. 1986.

Halin, R. [80 / 81] Graphentheorie I, II Wissenschaftliche Buchge- sellschaft, Darmstadt, Bd. I (1980) 321 S., Bd. II (1981) 304 S.

Heesch, H. - O. Kienzle [63] Flächenschluß, Springer 1963, 141 S.

Higgins, Muriel [83] New Designs for Machine Patchwork, B. T. Batsford, London 1983, 144 S.

Klemm, M. [82] Symmetrien von Ornamenten und Kristallen, Springer 1982, 214 S.

Laves, F. [31] Ebenenteilung und Koordinationszahl, Z. Kristallogr. 78 (1931) 208 - 241.

Löckenhoff, H. D. [68] Über die Zerlegung der Ebene in zwei Arten topologisch verschiedener Flächen, Diss. Univ. Marburg, 1968, 167 S.

Martin, G. E. [82] Transformation Geometry, Springer 1982, 237 S.

Shubnikov, A. V. - V. A. Koptsik [74] Symmetry in Science and Art, Plenum Press, New York - London, 1974, 420 S.

Wieting, T. W. [82] The Mathematical Theory of Chromatic Plane Ornaments, Marcel Dekker 1982, 367 S.

Tischrede

Prof. Dr. Jürgen Sprekels

Lieber, verehrter Herr Collatz,

nachdem wir am heutigen Nachmittag in offiziellem Rahmen die Gelegenheit dazu hatten, den überragenden Einfluß Ihrer fachlichen Leistungen auf die Entwicklung der Angewandten Mathematik zu würdigen, möchte ich als Ihr Schüler nunmehr die Gelegenheit ergreifen, einige, zum Teil ganz persönliche, Bemerkungen über den Einfluß hinzuzufügen, den Sie als Mensch auf Ihre Umwelt ausüben.

Sie haben mir einmal, als wir über einen Vortrag sprachen, den ich zu halten hatte, die folgende goldene Regel mit auf den Weg gegeben:
"Ein guter mathematischer Vortrag besteht aus vier Teilen: Den ersten verstehen alle Zuhörer, den zweiten nur noch die Experten, den dritten nur noch der Vortragende und den vierten auch der Vortragende selbst nicht mehr."

Als Ihr gelehriger Schüler will ich mich in dieser nichtmathematischen Rede an diese Regel halten und über vier Aspekte berichten, aus denen man - wie ich meine - ein wenig ableiten kann, worin Ihr großer menschlicher und fachlicher Einfluß begründet liegt.

Die erste derartige Begebenheit erlebte ich als junger Student des fünften Semesters, der nach dem Vordiplom das große Glück gehabt hatte, bei Ihnen eine Stelle als wissenschaftliche Hilfskraft zu erhalten. Ich hatte damals zusammen mit einem Kollegen die Aufgabe, die von Ihnen entwickelten Methoden numerisch auszutesten. Ich erinnere mich noch sehr gut daran, wie wir, nachdem Sie uns die erste Aufgabe gestellt und dazu die nötigen Erläuterungen gegeben hatten, Ihr Zimmer verließen und uns mit großen Augen ansahen - in der festen Überzeugung, dieses Problem nie lösen zu können. Wir hatten nämlich überhaupt nichts verstanden. Dennoch gelang es uns, durch 14tägige Arbeit an der guten alten TR 4 Resultate zu erzielen, die uns vernünftig erschienen. Als wir sie Ihnen vorlegten, zogen Sie den unvermeidlichen Stummelbleistift aus der Rocktasche, malten einige Figuren, murmelten dies und das, und sagten schließlich, einer der beiden gesuchten Parameter müsse ja doch wohl

$\sqrt{2\pi}$ sein. In der Tat, bis auf die unvermeidlichen Rundungsfehler hatten wir glücklicherweise dasselbe Resultat. Wir verließen damals recht depremiert Ihr Zimmer, nahmen uns aber zu Herzen, daß man sich Probleme vielleicht doch erst einmal genauer ansehen sollte, bevor man den Computer zu Rate zieht.

Es geschah noch ein zweites Mal, daß ich gehörig depremiert in Ihrem Zimmer saß. Dies war nach meiner mündlichen Prüfung bei Ihnen im Rahmen meiner Promotion. Ich hatte in der vorangegangenen Dreiviertelstunde nicht so besonders gut ausgesehen - wie ich meinte. Jedenfalls staunte ich nicht wenig, als Sie mir die Note mitteilten und lächelnd hinzufügten: "Also, in der Doktorprüfung, da pflege ich meinen jungen Leuten immer noch einmal deutlich zu zeigen, daß noch viel Arbeit für sie zu tun bleibt". Ich tröstete mich damit, daß ich mich in guter Gesellschaft befinden mußte, denn ähnlich mußte es ja dann auch den anderen fast 50 "jungen Leuten" ergangen sein, die insgesamt bei Ihnen promoviert haben. Ihre große Fähigkeit, junge Leute für die Wissenschaft zu begeistern, sie zu überzeugen, daß stets noch Arbeit zu tun bleibt, wird wohl durch nichts eindrucksvoller bezeugt, als durch die rund 50 Promotionen und 20 Habilitationen, die unter Ihrer Betreuung entstanden sind.

Überhaupt haben Sie sich um den Kontakt zum wissenschaftlichen Nachwuchs und vor allem zu Ihren Studenten stets besonders bemüht. Man geht gern in Ihre Vorlesungen, die durch Ihren Enthusiasmus immer äußerst lebendig und anregend sind. Dabei werden stets auch neueste Forschungsresultate eingearbeitet; ohne Frage haben Sie die Einheit von Forschung und Lehre in Ihren Vorlesungen vorbildlich verwirklicht.

Aber man lernt Sie als Student nicht nur als Professor Lothar Collatz, sondern auch ganz anders kennen. Berühmt-berüchtigt sind im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach die Collatz-Wanderungen anläßlich der von Ihnen veranstalteten Tagungen. Diese sind allerdings nur ein müder Abklatsch der Wanderungen, die Sie jedes Semester mit Ihren Studenten in Hamburg durchführen. Sie gehen strikt nach dem Kompaß vor, und weder Brennesselwälder noch Stacheldrahtzäune und schon gar nicht Bäche und Weiher können Ihre Abneigung, vom direkten Weg abzuweichen, verringern. Eine Ausnahme gibt es dabei: An Bächen hat entweder Ihr Kompaß Probleme oder das Erdmagnetfeld einen Knick; jedenfalls geht es in zehn Minuten bis zu

zehnmal über denselben Bach. Es gibt manchen nassen Fuß und manche zerrissene Hose zu beklagen. Ich bekenne es ehrlich: Daß Sie nie selbst in den Bach fielen, machte schon einigen Eindruck auf uns. Damit diese Wanderungen nicht zu militärisch ausfallen, müssen immer einige junge Damen daran teilnehmen, und damit bin ich beim letzten Aspekt meines Vortrags, nämlich bei dem, den ich selbst nicht mehr verstehe. Bei einer dieser Wanderungen war nämlich auch jene junge Mathematikstudentin dabei, die hier zu meiner Rechten sitzt: Meine Frau. Ich muß Ihrer Lust zum Wandern also besonders dankbar sein.

Meine Damen und Herren, hoffentlich ist es mir wenigstens ein wenig gelungen, Ihnen die große Vielfalt der Einflüsse anzudeuten, die der Mensch Lothar Collatz bewirkt hat. Ich möchte Ihnen, verehrter Herr Collatz, und auch Ihnen, verehrte Frau Collatz, sehr herzlich dafür danken.

Schlußworte

Prof. Dr. Martin Grötschel, Dekan der Naturwissenschaftlichen Fakultät

Ich möchte mich an dieser Stelle für die ausgezeichneten Darbietungen unserer beiden Musiker bedanken. Sie haben Bach's Chromatische Phantasie und Fuge in einer Bearbeitung von Busoni und die Nocturne von Chopin gespielt. Um Musikqualität der hier präsentierten Art zu hören, muß man anderenorts hohe Eintrittsgebühren zahlen. Zu unserem Glück haben beide Interpreten, die ich Ihnen nun vorstellen möchte, zum Ruhme der Mathematik und für Gotteslohn gespielt. Das Cello strich Johannes Nauber, Mitglied der Cellisten der Berliner Philharmoniker, und das Klavier spielte Jürgen Appell, Privat-Dozent an der Naturwissenschafltichen Fakultät, der sich vor wenigen Monaten im Fach Mathematik habilitiert hat. Wie Sie sehen und hören gibt es bei uns nicht nur mathematische Talente.

Für "mathematische Verhältnisse" haben Sie an diesem Nachmittag nur recht wenig Mathematik gehört. Ich dachte mir, daß das Ende unseres Festaktes der richtige Zeitpunkt sei, Ihnen ein "kleines" Problem mit auf den Weg zu geben, das noch nicht gelöst ist, obschon es so einfach erscheint. Wir wollen die Funktion

$$f: I\!N \to I\!N$$

definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n = 1 \text{ gilt} \\ 3n+1 & , \text{ falls } n \neq 1 \text{ ungerade ist,} \\ n/2^s & , \text{ falls } n \text{ gerade ist} \\ & \text{ (}2^s \text{ ist die größte in } n \\ & \text{ enthaltene Zweierpotenz)} \end{cases}$$

studieren. In der Mathematik wird diese Funktion **Collatz-Funktion** genannt. Wir legen einen Startpunkt n aus $I\!N$ fest und interessieren uns für die Folge

$$n, f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \ldots$$

In der nachfolgenden Tabelle sind einige Startwerte n und die daraus resultierenden Folgen der obigen Art angegeben. $f^k(n)$ bezeichnet dabei die k-te Iteration der Funktion f, also ist $f^2(n) = f(f(n))$ und $f^3(n) = f(f(f(n)))$. Manche Zeilen der Tabelle enden mit 1. Das bedeutet, daß ab dieser Stelle die Folge den Wert 1 beibehält. Manche Zeilen enden mit einer von 1 verschiedenen Zahl, sagen wir p. Ist dies so, dann ist die Folge mit Anfangswert p bereits vorher untersucht worden, und man erhält die Gesamtfolge durch Verkettung.

n	$f(n)$	$f^2(n)$	$f^3(n)$	$f^4(n)$	$f^5(n)$	$f^6(n)$	$f^7(n)$	$f^8(n)$
2	1							
5	16	1						
3	10	5						
13	40	5						
11	34	17	52	13				
7	22	11						
9	28	7						
15	46	23	70	35	106	53	160	5
17	52	13						
19	58	29	88	11				

Aus der obigen Tabelle liest man z. B. ab, daß die Folge mit Startwert 19 wie folgt aussieht: 19, 58, 29, 88, 11, 34, 17, 52, 13, 40, 5, 16, 1, 1, ... Dieses Beispiel kann man mit Hilfe eines Rechners fortführen. In der folgenden Tabelle haben wir zu jedem der aufgeführten Startwerte lediglich die Anzahl der von 1 verschiedenen Werte der Folge angegeben.

n	von 1 verschiedene Werte
11111	33
33333	89
55555	107
77777	119
99999	163
12345	29
54321	19
111111	77
333333	105
555555	99
777777	105
999999	185
123456	36
654321	129
1111111	113
3333333	97
5555555	67
7777777	59
9999999	153
1234567	71
7654321	79

Wie Sie sehen, wird die Folge in unseren Beispielen immer nach einigen wenigen Schritten konstant 1. In den dreißiger Jahren hat Herr Collatz als erster diese interessante Beobachtung gemacht und vermutet, daß für jeden Startwert n die Folge

$$n, f(n), f(f(n)), \ldots$$

nach endlich vielen Iterationen konstant mit dem Wert 1 wird. Diese Vermutung -- allgemein **Collatz-Vermutung** genannt -- ist bis heute ungelöst. Sie sieht doch eigentlich ganz einfach aus! Ich möchte Ihnen dieses Problem mit auf den Heimweg geben und nicht unerwähnt lassen, daß kürzlich in England ein Preis in Höhe von £ 1 000,-- für eine Lösung der Collatz-Vermutung ausgesetzt wurde. Eine Warnung gebe ich allerdings. Versuchen Sie besser nicht numerisch, d. h. durch Rechnung auf dem Computer, Gegenbeispiele zu finden. Man hat durch Computerrechnungen gezeigt, daß die Collatz-Vermutung für alle Zahlen $n \leq 700$ Milliarden korrekt ist und daß, falls die Folge $n, f(n) f^2(n), ..$ mit einer Periode, die den Wert 1 nicht enthält, (also $f^k(n) = f^j(n) \neq 1$) existiert, diese Periode mindestens 500 000 Elemente enthalten muß (also $|k - j| \geq 500\,000$). Vielleicht hat dennoch einer unserer Studenten eine gute Idee, die zur Lösung der Collatz-Vermutung führt.

Meine Damen und Herren, ich möchte mich bei Ihnen ganz herzlich für Ihr Kommen bedanken und damit den Festakt beschließen.